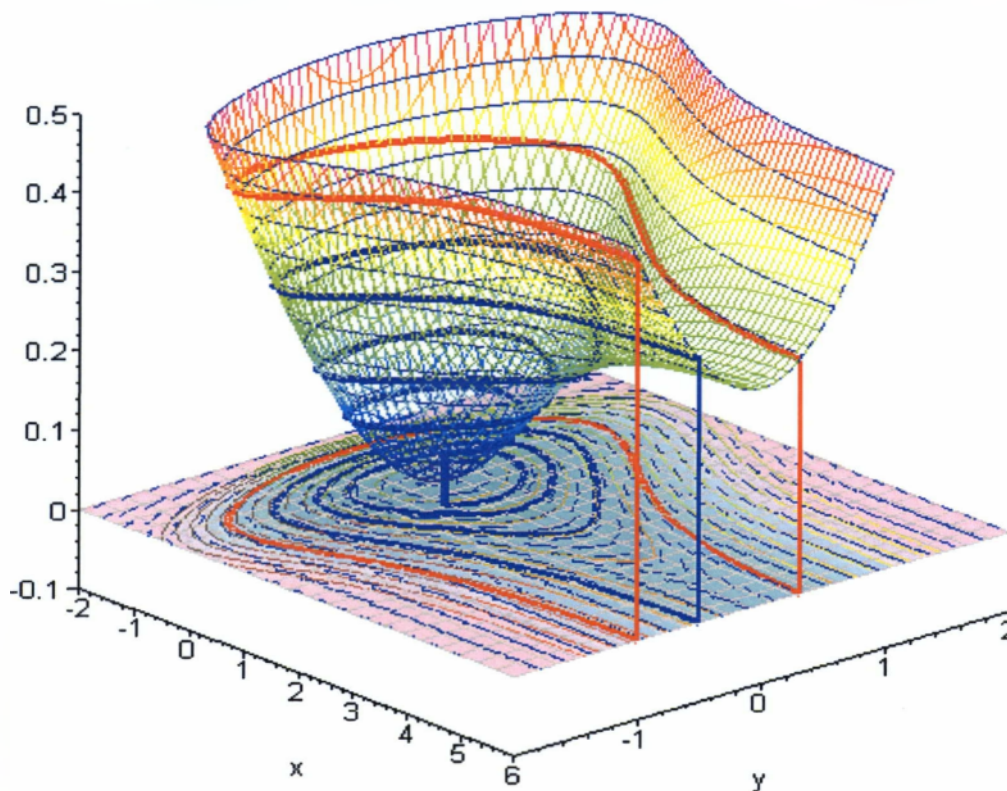


ΑΝΩΤΑΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ
ΙΔΡΥΜΑ ΚΑΛΑΜΑΤΑΣ
= ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΠΑΡΤΗΣ =
ΤΜΗΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

ΝΙΚΑ ΠΑΝΑΓΙΩΤΑ
(Α.Μ.2005104)

Θεωρητική μελέτη και προσομοίωση κυκλώματος ταλαντωτή Van der Pol.



ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Επιβλέποντες: Παναγιώτης Βυριδής, Επιστημονικός Συνεργάτης
Γιάννης Λιαπέρδος, Καθηγητής Εφαρμογών

ΣΠΑΡΤΗ 2010

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΠΑΝΑΓΙΩΤΑ Δ. ΝΙΚΑ

**Θεωρητική μελέτη και προσομοίωση
κυκλώματος ταλαντωτή
Van der Pol.**

Εξεταστική Επιτροπή

Επιβλέπων Βυριδής Παναγιώτης

Επιβλέπων Λιαπέρδος Γιάννης

Μέλος Σταθόπουλος Στάθης

ΣΠΑΡΤΗ 2010

Αφιερωμένη στη μητέρα μου

Ευδοκία

"No amount of experimentation can ever prove me right,
a single experiment can prove me wrong."

Albert Einstein

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	6
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	8
Α. Ιστορική Αναδρομή	8
Β. Βασικές Έννοιες Δυναμικής Ταλαντωτών	9
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 "ΣΧΕΙΑΣΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ VAN DER POL"	
1.1 Εισαγωγή	19
1.2 Μεθοδολογία Σχεδίασης	20
1.2.1 Βασικά Στοιχεία Δόμησης	20
1.2.1.1 Ολοκληρωτής	20
1.2.1.2 Κύκλωμα Τετραγωνισμού	21
1.2.1.3 Κύκλωμα Ενισχυτή Τάσης	22
1.3 Κύκλωμα Ταλαντωτή Van der Pol	23
1.4 Προσομοίωση	27
Κεφάλαιο 2" Θεωρητική Μελέτη του ταλαντωτή Van der Pol"	
2.1 Ποιοτική Μελέτη της εξίσωσης Van der Pol	
Παράσταση στο χώρο των φάσεων	30
2.2 Προσεγγιστική λύση της εξίσωσης Van der Pol	
43	
Κεφάλαιο 3 "Η εξίσωση Van der Pol στο matlab"	
3.1 Το κλασσικό μοντέλο	51
3.2 Το μοντέλο με προσθήκη θορύβου	63
3.2.1 Λευκός θόρυβος (White Noise)	
64	
3.2.2 Ρόζ θόρυβος (Pink Noise)	71
Παράρτημα	
Α. Μαθηματικά	78
Α.1 Θεώρημα Ύπαρξης & Μοναδικότητας Λύσης Συνήθους Διαφορικής Εξίσωσης πρώτης τάξεως	78
Α.2 Συστήματα Lienard	78
Β. Χάος	80
Γ. Βιογραφία	84
Δ. Βιβλιογραφία	86

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει σαν σκοπό τη σχεδίαση και τη θεωρητική μελέτη ενός κυκλώματος και πιο συγκεκριμένα ενός ταλαντωτή τύπου Van der Pol. Το χαρακτηριστικό ενός τέτοιου ταλαντωτή είναι η λεγόμενη «μη γραμμικότητα». Θα μπορούσε εντούτοις η περιγραφή ενός τέτοιου μοντέλου να εκπληρώσει και εκπαιδευτικούς στόχους ενός μαθήματος ηλεκτρονικής, αφενός ως αντιπαράδειγμα στη γραμμικότητα (συνήθως τα μοντέλα αυτού του μαθήματος είναι γραμμικά) αφετέρου ως πρότυπο πολλών τεχνολογικών εφαρμογών.

Η εργασία αποτελείται κυρίως από δύο βασικά μέρη: Τη σχεδίαση του κυκλώματος με την εξαγωγή της περίφημης εξίσωσης Van der Pol και στη συνέχεια τη θεωρητική – ποιοτική μελέτη και τη προσεγγιστική επίλυση της εξίσωσης αυτής. Το θεωρητικό μέρος είναι αρκετά επεκτεταμένο από μαθηματικής άποψης, γεγονός είναι όμως πως για την κατανόησή του απαιτούνται απλές γνώσεις Ανάλυσης και Γραμμικής Άλγεβρας, οι οποίες συνήθως διδάσκονται στα πρώτα εξάμηνα σπουδών των Τεχνολογικών Ιδρυμάτων. Η μέθοδος εισάγεται σύμφωνα με τη φυσική διαίσθηση και αποφεύγεται η αυστηρή διατύπωση. Τα δύο μέρη αυτά πλαισιώνονται από μία εισαγωγή, σκοπός της οποίας είναι μια ιστορική αναδρομή και η αντιδιαστολή γραμμικότητας – μη γραμμικότητας και από την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης Van der Pol σε περιβάλλον Matlab, οπωσδήποτε με ακριβέστερα αποτελέσματα.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους επιβλέποντες κ.κ. Βυριδή Παναγιώτη και Λιαπέρδο Ιωάννη. Η εργασία αυτή ολοκληρώθηκε βασισμένη στην εμπιστοσύνη, στην καθοδήγηση και στην άριστη συνεργασία τους μαζί μου.

Σπάρτη ,ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2010

Ευχαριστίες

Παντοπινοί υποστηρικτές μου είναι η μητέρα μου Ευδοκία και η αδερφή μου Χριστίνα Νίκα.

Άνθρωποι που τόσα χρόνια στηρίζουν τις επιλογές μου και με εμπυχώνουν σε κάθε μου βήμα. Το μεγαλύτερο κίνητρο για μένα να συνεχίζω είναι το χαμόγελό τους και η ικανοποίησή τους.

Τους ευχαριστώ όλους ολόψυχα....

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Α. ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Σήμερα υπάρχει μια μεγάλη γοητεία στο άκουσμα της λέξης χάος. Φαίνεται ότι ακόμα άνθρωποι, οι οποίοι δεν ασχολούνται με τις Θετικές Επιστήμες και την Τεχνολογία κατέχονται από τη θέληση να ανακαλύπτουν περίεργα "χασοτικά" σχήματα (όπως π.χ. τα fractals - μορφοκλασματικοί σχηματισμοί) στη φύση αλλά και στην τέχνη.

Πριν λοιπόν ασχοληθεί κανείς με το χάος τα fractals και τη θεωρία καταστροφών σε επίπεδο συζήτησης (και όχι πάντοτε σοβαρής), έντονης διχογνωμίας (συχνά καλά τεκμηριωμένης), μέχρι την αυστηρά θεμελιωμένη μαθηματική θεώρηση, πρέπει να συμφωνήσει στο εξής: όλες οι παραπάνω έννοιες είναι μέρος ενός γενικότερου αντικειμένου γνωστό ως Δυναμική. Το αντικείμενο αυτό ασχολείται με τη μεταβολή συστημάτων κατά την πάροδο του χρόνου. Όταν κάποιο σύστημα περιέρχεται σε κατάσταση ισορροπίας, επαναλαμβάνεται σε τακτά χρονικά διαστήματα (σχηματίζοντας κύκλους) ή συμπεριφέρεται πιο περίπλοκα, η Δυναμική είναι αυτή που αναλύει τη συμπεριφορά αυτή.

Αν και η δυναμική σήμερα είναι ένας ανεξάρτητος επιστημονικός τομέας σήμερα, αρχικά ήταν κλάδος της φυσικής. Το αντικείμενο δρομολογήθηκε στα μέσα του 17^{ου} αιώνα όταν ο Νεύτων (Newton) εισάγωντας τις διαφορικές εξισώσεις ανακάλυψε τους νόμους της κίνησης και της παγκόσμιας έλξης. Ειδικότερα ο Νεύτων έλυσε το πρόβλημα των δύο σωμάτων (το πρόβλημα υπολογισμού της κίνησης της γής γύρω από τον ήλιο, δίνοντας το νόμο του αντιστρόφου τετραγώνου της απόστασης της βαρυτικής έλξης αναμεσά τους). Πολλοί επιστήμονες στη συνέχεια προσπάθησαν να επεκτείνουν τις αναλυτικές μεθόδους του Νεύτωνα στο πρόβλημα των τριών σωμάτων (π.χ. Γή, Ήλιος, Σελήνη) αλλά αξιοπερίεργα το πρόβλημα αυτό απεδείχθη πολύ δυσκολότερο. Βέβαια μερικές δεκάδες χρόνια αργότερα τελικά εξακριβώθηκε ότι το πρόβλημα των τριών σωμάτων ήταν ουσιαδώς αδύνατον να επιλυθεί με την έννοια της εξαγωγής ακριβούς τύπου για την κίνηση των τριών σωμάτων.

Η επανάσταση ήρθε με τις εργασίες του Poincare στα τέλη του 19^{ου} αιώνα. Ο τελευταίος καθολικός επιστήμονας, όπως αποκαλείται, εισήγαγε μια νέα άποψη στη Δυναμική κατά την οποία θα ήταν προτιμότερο να επικεντρωθούμε στην ποιοτική μελέτη των εξισώσεων παρά στην απόπειρα εύρεσης του τελικού τύπου λύσεως. Για παράδειγμα αντί να θέσουμε ερωτήματα της ακριβούς θέσεως των πλανητών σε κάθε χρονική στιγμή θα ήταν καλύτερα να θέσουμε την εξής ερώτηση: θα είναι για πάντα το ηλιακό μας σύστημα ευσταθές ή κάποια στιγμή μερικοί πλανήτες θα αποκλίνουν κάποια στιγμή στο άπειρο;

Ο Poincaré ανέπτυξε μια πανίσχυρη γεωμετρική προσέγγιση προς απάντηση τέτοιων ερωτημάτων. Η προσέγγιση αυτή κυριαρχεί μέσα στο σύγχρονο αντικείμενο της δυναμικής, οι εφαρμογές της οποίας φτάνουν πολύ μακριά από την Μηχανική.

Ο Poincaré επίσης ήταν ο πρώτος που μίλησε για την πιθανότητα του χάους, δηλαδή ένα αιτιοκρατικό (ντετερμινιστικό) σύστημα, το οποίο επιδεικνύει απεριοδική συμπεριφορά εξαρτώμενη από αρχικές συνθήκες, δεν είναι δυνατόν να είναι προβλέψιμο μετά την πάροδο μεγάλου χρονικού διαστήματος.

Αλλά η έννοια του χάους δεν ετέθηκε αμέσως στο ερευνητικό πεδίο. Αντίθετα η Δυναμική σε μεγάλο βαθμό ασχολήθηκε με τους μη γραμμικούς ταλαντωτές και τις εφαρμογές τους στη Φυσική και την Τεχνολογία.

Οι μη γραμμικοί ταλαντωτές έπαιξαν ζωτικό ρόλο στην ανάπτυξη τέτοιας τεχνολογίας όπως το ραδιόφωνο, το ραντάρ, ο βρόγχος κλειδωμένης φάσης (phase-locked loop, PLL) και το Laser. Από θεωρητικής άποψης οι μη γραμμικοί ταλαντωτές επέδρασαν στην ανακάλυψη νέων μαθηματικών τεχνικών, πρωτοπόροι στην κατεύθυνση αυτή ήταν οι Van der Pol, Andronov, Littlewood, Cartwright, Levinson και Smale, με τους δύο πρώτους να είναι μηχανικοί. Εν τω μεταξύ οι γεωμετρικές μέθοδοι του Poincaré οδήγησαν σε μια πολύ βαθύτερη μελέτη της Μηχανικής και της Θεωρητικής Φυσικής με την ανάπτυξη της Διαφορικής Τοπολογίας.

Η ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών έπαιξε καταλυτικό ρόλο στην ιστορία της Δυναμικής. Ο υπολογισμός γενικά επιτρέπει τον πειραματισμό με τις εξισώσεις με τρόπο που ήταν αδύνατος πριν και συνεπώς αναπτύσσει στο μελετητή τη διαίσθηση στα μη γραμμικά συστήματα.

B. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΩΝ

Για την καλύτερη κατανόηση της Δυναμικής πρέπει να εισάγουμε κάποια ορολογία. Υπάρχουν δύο τύποι δυναμικών συστημάτων. Τα συνεχή και τα διακριτά. Στα συνεχή συστήματα ο χρόνος είναι συνεχής και η εξέλιξη τους περιγράφεται από τις Διαφορικές Εξισώσεις. Στα διακριτά συστήματα ο χρόνος είναι διακριτός και η εξέλιξη τους περιγράφεται από τις Εξισώσεις Διαφορών (ή επαναληπτικές απεικονίσεις). Το μοντέλο που θα εξετάσουμε ανήκει στα συνεχή συστήματα, οπότε θα επικεντρωθούμε στη μελέτη μιας Διαφορικής Εξίσωσης, ειδικότερα μιας μη γραμμικής Διαφορικής εξίσωσης.

Εδώ πρέπει να κάνουμε πλέον τη διάκριση Γραμμικότητας - Μη Γραμμικότητας από μαθηματικής άποψης. Είναι γνωστές οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις της μορφής:

$$a \frac{d^2 u}{dt^2} + b \frac{du}{dt} + ku = 0 \quad (0.2.1)$$

$$a \frac{d^2 u}{dt^2} + bu = 0 \quad (0.2.2)$$

Η πρώτη εκφράζει μια αποσβεννυμένη αρμονική ταλάντωση, η οποία για ένα κύκλωμα RLC (χωρίς εξωτερική πηγή) γράφεται στη μορφή

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{c} \cdot q = 0$$

Με συντελεστή απόσβεσης $\frac{R}{2L}$ και συχνότητα $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ενώ για ένα μηχανικό σύστημα γράφεται στη μορφή

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + K \cdot x = 0$$

με συντελεστή απόσβεσης $\frac{\lambda}{2m}$ και συχνότητα $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$. Η δεύτερη εξίσωση εκφράζει την τέλεια αρμονική ταλάντωση, χωρίς απόσβεση, η οποία για ένα κύκλωμα LC θα είναι:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$$

Και στα δύο παραδείγματα η άγνωστη συνάρτηση και οι παραγώγοι της βρίσκονται υψωμένοι στη πρώτη δύναμη. Λέμε τότε η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική. Σε αντίθετη περίπτωση μια διαφορική εξίσωση ονομάζεται μη γραμμική. Πράγματι από την άποψη της μηχανικής η εξίσωση του μαθηματικού εκρεμούς δίνεται από την σχέση :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 \sin x = 0$$

η οποία προφανώς είναι μη γραμμική αφού η συνάρτηση $x = x(t)$ βρίσκεται στο όρισμα του ημιτόνου. Βέβαια θεωρώντας μικρές μετατοπίσεις οπότε x πολύ μικρό ισχύει η προσέγγιση

$$\sin x \cong x$$

οπότε καταλήγουμε σε μια εξίσωση τύπου (0.2.2). Η διαδικασία αυτή ονομάζεται γραμμικοποίηση.

Τα περισσότερα μη γραμμικά συστήματα είναι αδύνατον να λυθούν αναλυτικά. Όμως γιατί η μελέτη των μη γραμμικών συστημάτων είναι πολύ δυσκολότερη από αυτή των γραμμικών; Η ουσιαστική διαφορά είναι ότι τα γραμμικά συστήματα μπορούν να διασπαστούν σε δύο ή περισσότερα μέρη. Τότε κάθε μέρος μπορεί να επιλυθεί ξεχωριστά και στο τέλος η γενική λύση είναι ο γραμμικός συνδυασμός των επιμέρους λύσεων. Η ιδέα αυτή επιτρέπει μια απίστευτη απλοποίηση πολύπλοκων γραμμικών συστημάτων και εισάγει τη χρήση μεθόδων όπως η αρχή της υπέρθεσης, ο μετασχηματισμός Laplace, η ανάλυση Fourier κλπ. Με αυτή την έννοια ένα γραμμικό σύστημα είναι ακριβώς το άθροισμα των κομματιών του.

Δυστυχώς όμως τα περισσότερα πράγματα στη φύση δεν λειτουργούν έτσι. Οπότε κάποια μέρη ενός συστήματος συγκρούονται ή συνεργάζονται ή ανταγωνίζονται, υπάρχουν πάντα μη γραμμικές αλληλεπιδράσεις. Τα περισσότερα φαινόμενα στη καθημερινότητα είναι μη γραμμικά οπότε η αρχή της υπέρθεσης αποτυγχάνει χαρακτηριστικά.

“Αν ακούς δύο αγαπημένα σου τραγούδια ταυτόχρονα η απόλαυση δεν είναι διπλή”

Εντούτοις η μελέτη γραμμικών συστημάτων επιτρέπει την “τοπική” προσέγγιση των μη γραμμικών με δύο βασικά τρόπους:

A) την παράσταση γραφημάτων σε ένα σύστημα συντεταγμένων:

$$u = x, \quad v = \frac{dx}{dt} = \dot{u}$$

το οποίο καλείται επίπεδο (ή γενικότερα χώρος) φάσεων, η γεωμετρία του οποίου μπορεί να δώσει χρήσιμα συμπεράσματα για το φαινόμενο χωρίς μάλιστα να χρειαστεί η λύση της αντίστοιχης διαφορικής εξίσωσης.

B) Η λύση ενός μη γραμμικού συστήματος, η οποία δυστυχώς τις περισσότερες φορές δεν δίνεται αναλυτικά (κλασσικό παράδειγμα τα ελλειπτικά ολοκληρώματα), θα μπορούσε να είναι ένα προσεγγιστικό άθροισμα λύσεων γραμμικών συστημάτων ή διαφορετικά όταν οι μη γραμμικοί όροι τείνουν στο μηδέν τότε και η λύση του μη γραμμικού συστήματος τείνει στη λύση του γραμμικού. Οι διαφορετικές εξισώσεις (1) και (2) περιγράφουν τους δύο παραπάνω τρόπους.

Ας θεωρήσουμε κατ’αρχήν τον απλό αρμονικό ταλαντωτή, ο οποίος περιγράφεται από τη γραμμική διαφορική εξίσωση (0.2.2). Ως γνωστόν η λύση δίνεται από τη σχέση

$$u(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$$

όπου c_1, c_2 πραγματικές σταθερές, οι οποίες προσδιορίζονται από δύο αρχικές συνθήκες:

$$u_0 = u(t_0), \quad \dot{u}_0 = \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=t_0}$$

Η λύση αυτή μπορεί να γραφεί σε μια πιο κλασσική μορφή:

$$u(t) = A \cos(\omega_0 t + B) \quad (0.2.3)$$

όπου εδώ οι πραγματικές σταθερές A, B αποκτούν τη συνήθη φυσική έννοια. Το A είναι το πλάτος της ταλάντωσης και το B είναι η διαφορά φάσης. Οι σταθερές αυτές πάλι προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες, οι σχέσεις που τις συνδέουν με τις προηγούμενες είναι

$$(u_0, v_0) \neq (0, 0)$$

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \sin B = \frac{C_1}{A}, \quad \cos B = \frac{C_2}{A}$$

Προφανώς η λύση (0.2.3) είναι περιοδική δηλαδή προκειται για ταλάντωση. Το συμπέρασμα αυτό θα μπορούσε να προκύψει δίχως να χρειαστεί κανείς να ανατρέξει στην επίλυση της (0.2.2). Πράγματι αν θεωρήσουμε το μετασχηματισμό $v = \dot{u}$ τότε

$$\dot{v} = -\omega^2 u = \ddot{u}.$$

Δηλαδή η διαφορική εξίσωση (0.2.2) είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

$$v = \dot{u}, \quad \dot{v} = -\omega_0^2 u \quad (0.2.4)$$

Αυτή είναι μια συνήθης διαδικασία στη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων η οποία ανάγει μια εξίσωση δευτέρας τάξεως σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως. Μία σημαντική παρατήρηση στο σύστημα (0.2.4) είναι ότι ο χρόνος t δεν φαίνεται πουθενά σαν ανεξάρτητη μεταβλητή. Ένα τέτοιο σύστημα καλείται αυτόνομο και μόνο με τέτοιου είδους συστήματα θα ασχοληθούμε. Επιπλέον ενδέχεται κάποιες λύσεις του συστήματος (0.2.4) είναι αναλλοίωτες στο χρόνο, δηλαδή λύσεις $u(t)$, $v(t)$ που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\frac{du(t)}{dt} = 0, \quad \frac{dv(t)}{dt} = 0$$

Τέτοιου είδους λύσεις καλούνται σημεία ισορροπίας (equilibrium points). Πράγματι θέτοντας στο σύστημα (0.2.4) $v' = u' = 0$ λαμβάνουμε το αλγεβρικό σύστημα

$$v = 0, \quad -\omega_0^2 u = 0 \quad (0.2.5)$$

Με προφανή λύση

$$u(t) = 0, \quad v(t) = 0$$

πράγμα αναμενόμενο (η λύση αυτή αντιστοιχεί σε λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με μηδενικές αρχικές συνθήκες !) Άρα το σύστημα (4) έχει σημείο ισορροπίας $(u, v) = (0, 0)$. Επίσης το σύστημα (0.2.4) είναι ισοδύναμο με τη σχέση

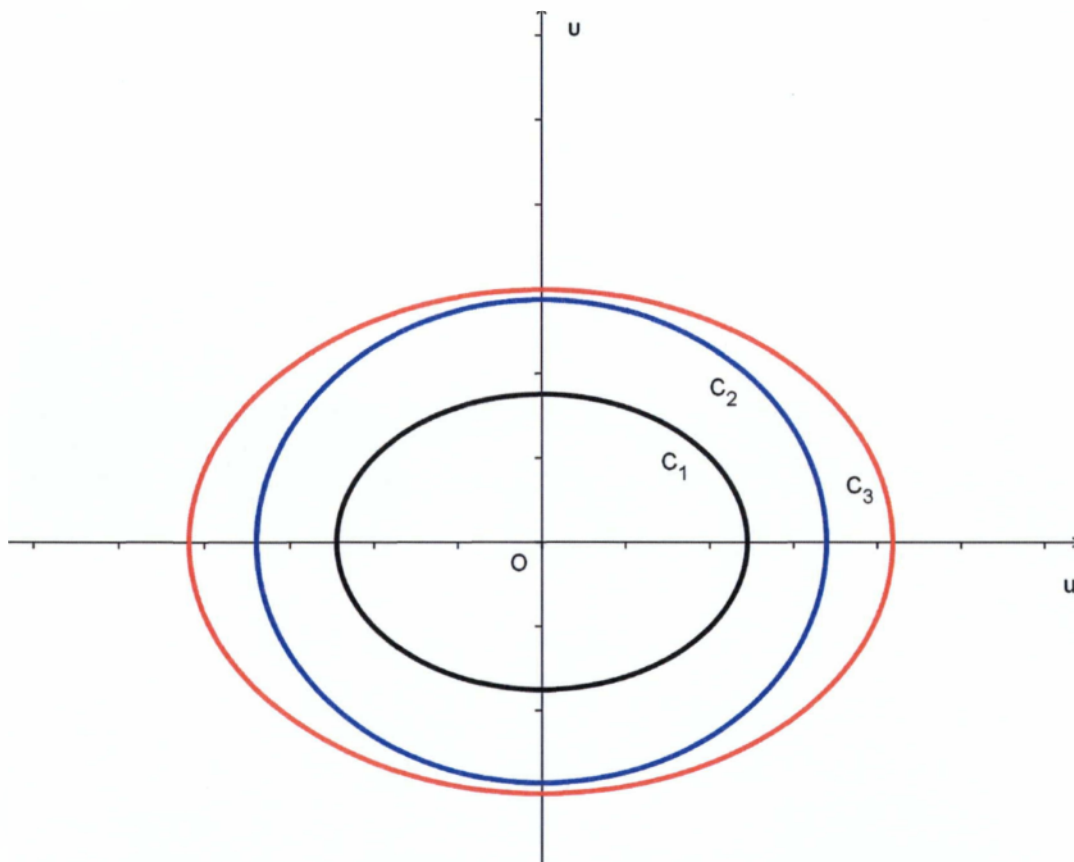
$$\frac{dv}{du} = -\omega_0^2 \frac{v}{u} \quad (0.2.6)$$

Παρατηρούμε ότι ο χρόνος t δεν εμφανίζεται πουθενά. Ολοκληρώνοντας την (0.2.6) λαμβάνουμε την σχέση

$$u^2 + \omega_0^2 v^2 = C \quad (0.2.7)$$

όπου C είναι η σταθερά ολοκλήρωσης, η οποία εξαρτάται από την αρχική συνθήκη $(u, v) = (v(t), u(t))$ του συστήματος (0.2.4) (φυσικά επιλέγουμε $(u, v) \neq (0, 0)$).

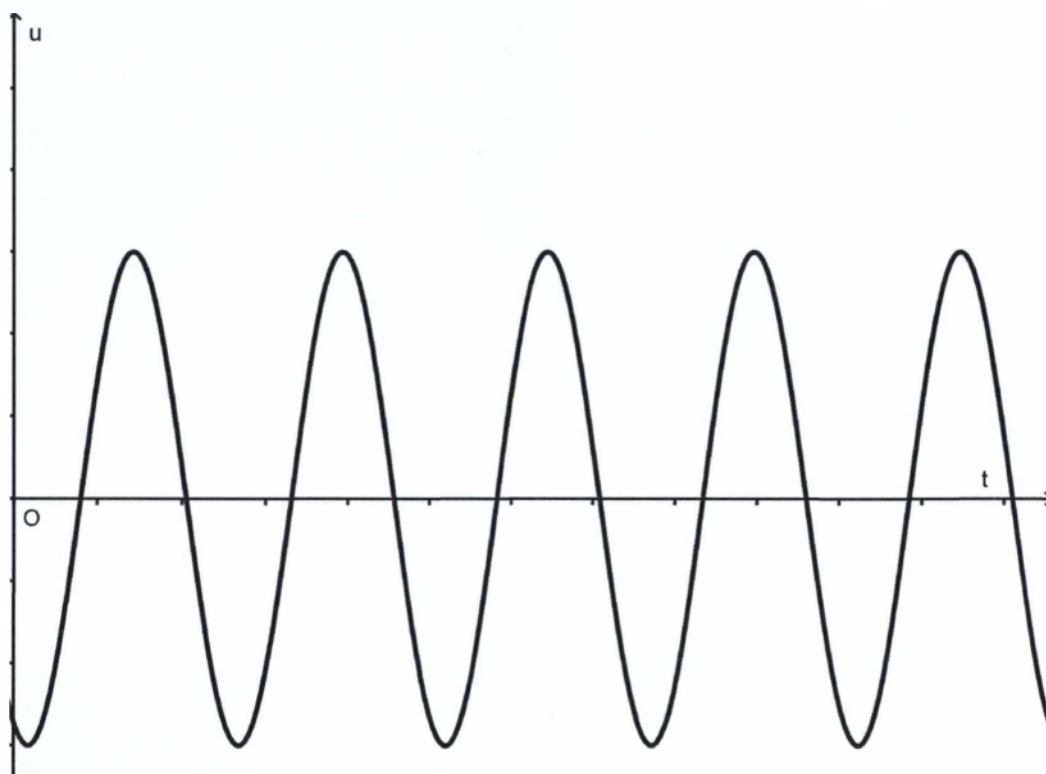
Η σχέση (0.2.7) είναι εξίσωση διαφόρων ελλείψεων για τις διάφορες τιμές του c σε ένα σύστημα αξόνων (u, v) γύρω από το κέντρο $(0, 0)$ (το οποίο αντιστοιχεί στο $C=0$).



Σχήμα 0.2.1. Επίπεδο φάσεων αρμονικού ταλαντωτή

Αυτό είναι το λεγόμενο διάγραμμα των φάσεων, οι δε ελλείψεις ονομάζονται τροχιές (trajectories), το σημείο ισορροπίας ονομάζεται κέντρο. Είναι σημαντικό να προσέξει κανείς ότι οι τροχιές (για διάφορες τιμές του c) δεν τέμνονται. Σε αντίθετη περίπτωση θα παραβίαζαν το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεως των διαφορικών εξισώσεων. Επιπλέον εφόσον οι τροχιές είναι κλειστές καμπύλες γύρω από την αρχή είμαστε υποχρεωμένοι να δεχτούμε πως οι λύσεις είναι περιοδικές. Ακόμα αναπτύσσοντας τη διαίσθησή

μας , περιμένουμε το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ να είναι ευσταθές, εφ' όσον οι τροχιές κοντά στο σημείο παραμένουν ως έχουν (δεν χαλάει το σχήμα τους). Τυπικά δίνουμε και τη γραφική παράσταση της λύσης (0.2.3), αν και όλες οι ιδιότητες της έχουν περιγραφεί χωρίς την εύρεσή της!



Σχήμα 0.2.2. Γραφική παράσταση απλής αρμονικής ταλάντωσης

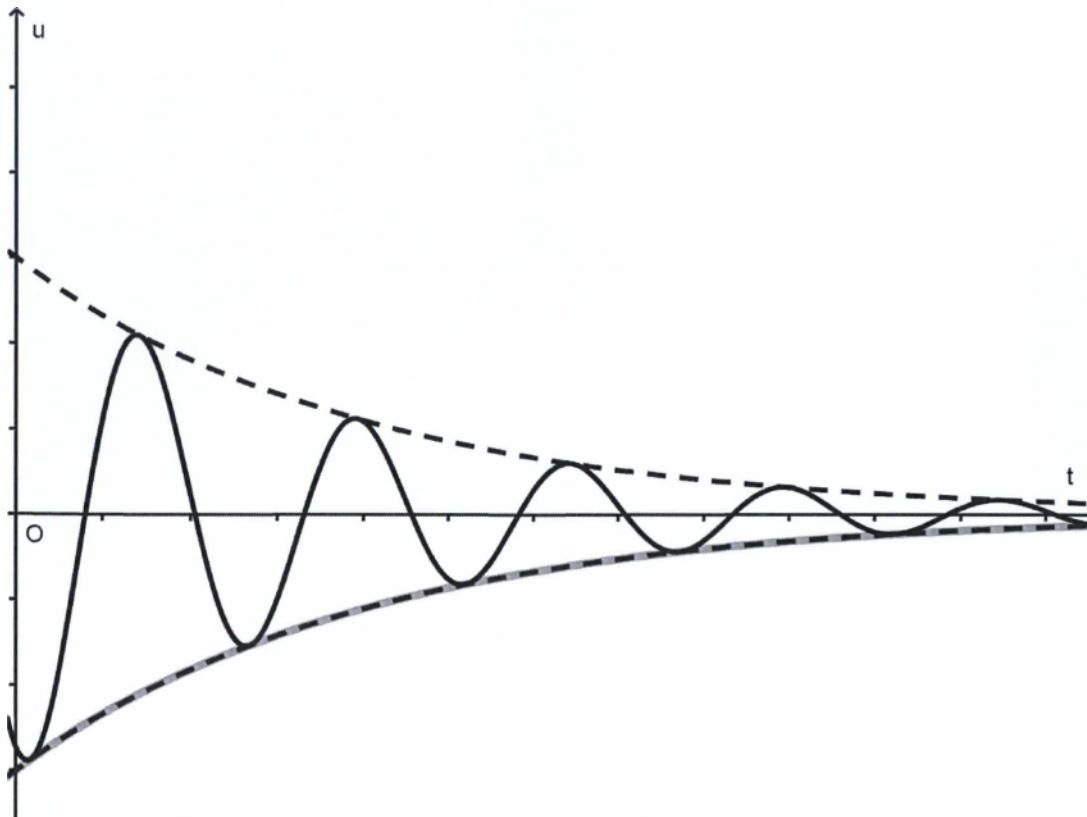
Προφανώς μια περιοδική λύση όπως φαίνεται στη γραφική παράσταση (t, u) αντιστοιχεί σε μοναδική τροχιά (u, u) . Με αυτήν τη γεωμετρική απεικόνιση είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε όλες τις ιδιότητες της λύσης μιας μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης χωρίς να βλέπουμε τη λύση.....

Θεωρούμε τώρα τον ταλαντωτή με απόσβεση , όπως αυτός περιγράφεται από τη γραμμική ομογενή διαφορική εξίσωση (0.2.1). Η λύση αυτής δίνεται από τον τύπο

$$u(t) = e^{At} (K_1 \cos Bt + K_2 \sin Bt), \quad (0.2.8)$$

όπου K_1, K_2 πραγματικές σταθερές, οι οποίες προσδιορίζονται από αρχικές συνθήκες ενώ $A = \operatorname{Re}(z)$, $B = \operatorname{Im}(z)$ όπου z η μιγαδική ρίζα του χαρακτηριστικού πολυώνυμου της (1) και επιπλέον $A < 0$ (όλα αυτά εφ' όσον η (0.2.1) αναπαριστά μια αποσβεννυμένη ταλάντωση).

Η γραφική παράσταση της (0.2.8) είναι :



Σχήμα 0.2.3. Γραφική παράσταση φθίνουσας αποσβεννυμένης ταλάντωσης

Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς πρόκειται για μια φθίνουσα ταλάντωση, όμως ο ρυθμός της μείωσης του πλάτους καθορίζεται από τον όρο e^{At} ($A < 0$). Έτσι το όλο φαινόμενο καθορίζεται από δύο "δυναμικές" μια γρήγορη της μορφής $t_1 = |B|t$ και μια αργή της μορφής $t_0 = |A|t$ με τον περιορισμό ότι η αργή δυναμική καθορίζει τη γρήγορη. Άρα η λύση (0.2.8) θα μπορούσε να αναζητηθεί στη μορφή :

$$u(t) = u(t_0, t_1)$$

Μια τέτοια μέθοδος καλείται κλιμάκωση του χρόνου.

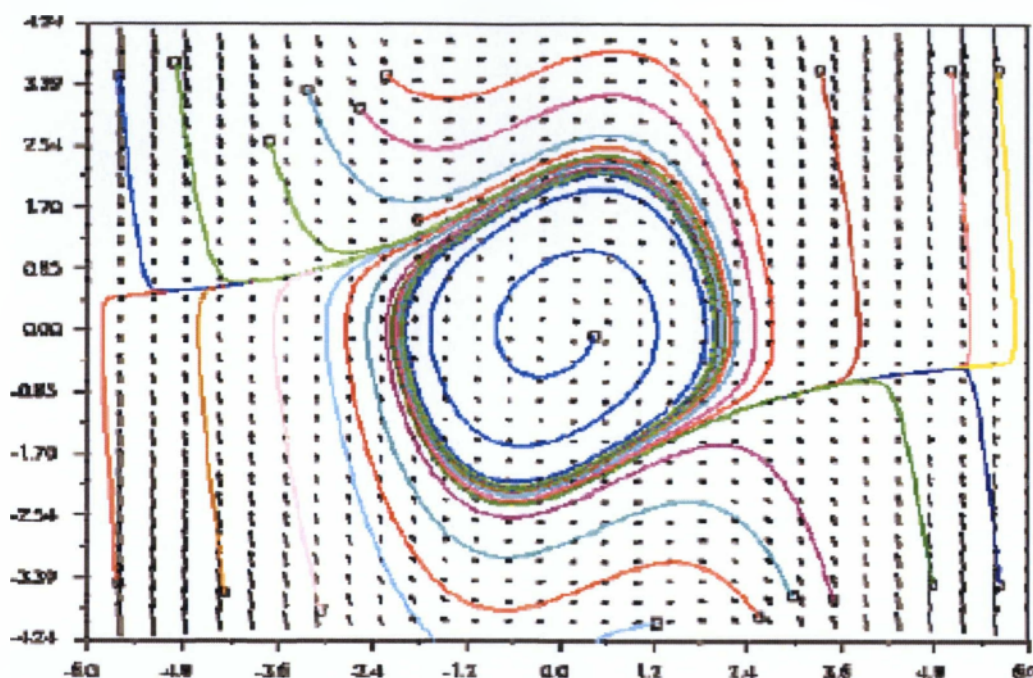
Σκοπός της παρούσης εργασίας είναι η μελέτη της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \mu(u^2 - 1) \frac{du}{dt} + u = 0, \quad \mu \geq 0, \quad (0.2.9)$$

η οποία καλείται εξίσωση Van der Pol και είναι προφανώς μη γραμμική.

Ο Balthazar van der Pol ήταν ολλανδός ηλεκτρολόγος μηχανικός που άρχισε τη σύγχρονη πειραματική δυναμική στο εργαστήριό του κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του '20 και της δεκαετίας του '30 όπου καινοτόμησε στους τομείς του ραδιοφώνου και των τηλεπικοινωνιών.

Ο Van der Pol ερεύνησε τα ηλεκτρικά κυκλώματα χρησιμοποιώντας λυχνίες κενού και διαπίστωσε τις σταθερές ταλαντώσεις, που τώρα καλούν οριακούς κύκλους. Πρώτα, εισήγαγε (την τώρα διάσημη) εξίσωσή του προκειμένου να περιγράψει ταλαντώσεις τριόδων (triode) στα ηλεκτρικά κυκλώματα, το 1927.



Σχήμα 0.2.4. Επίπεδο φάσεων του ταλαντωτή Van der Pol

Το μαθηματικό πρότυπο για το σύστημα είναι η γνωστή συνήθης διαφορική εξίσωση (0.2.9) δεύτερης τάξεως με κυβική μη γραμμικότητα van der Pol.

Από τότε χιλιάδες εργασίες έχουν δημοσιευτεί επιτυγχάνοντας τις καλύτερες προσεγγίσεις στις λύσεις που εμφανίζονται σε τέτοια μη γραμμικά συστήματα. Ο ταλαντωτής Van der Pol είναι ένα κλασσικό παράδειγμα του αυτο-ανατροφοδοτούμενου ταλαντωτή και θεωρείται πολύ χρήσιμο μαθηματικό πρότυπο, το οποίο μπόρεσε να χρησιμοποιηθεί στα πιο περίπλοκα και τροποποιημένα συστήματα.

Στη διαφορική εξίσωση (0.2.9) καταλήγουμε με την υλοποίηση ενός κυκλώματος - ταλαντωτή, όπου $u=V$ η τάση. Είναι γεγονός πως η (0.2.9) δεν είναι δυνατόν να λυθεί αναλυτικά. Τα προηγούμενα γραμμικά παραδείγματα όμως ίσως να επιτρέπουν αφ' ενός τη μελέτη των ιδιοτήτων της λύσεως: σημεία ισορροπίας, είδος ευστάθειας, περιοδικότητα (χωρίς την ακριβή μορφή της), αφ'ετέρου την αναζήτηση μιας προσεγγιστικής λύσης με κλιμάκωση του χρόνου. Πράγματι για $\mu=0$ η (0.2.9) αντιστοιχεί στον αρμονικό ταλαντωτή ενώ για $\mu \neq 0$ έχουμε έναν όρο απόσβεσης μη σταθερό της μορφής $\mu(u^2 - 1)$. Η ιδέα είναι όπως στην αποσβεννυμένη ταλάντωση: βρεθεί μια λύση στη μορφή

$$u(t) = u(t_0, t_1)$$

σαν διαταραχή της αρμονικής λύσης της (0.2.1). Με τον όρο διαταραχή εννοούμε ένα ανάπτυσμα της μορφής:

$$u(t) = u_0(t_0, t_1) + u_1(t_0, t_1) \quad (0.2.10)$$

όπου $u_0(t_0, t_1)$ μια λύση πολύ κοντά στη λύση της (0.2.1) ή της (0.2.2) και $u_1(t_0, t_1)$ η διόρθωσή της. Βέβαια όταν λέμε ότι η u_1 είναι η διόρθωση της u_0 , τίποτε δεν αποκλείει και την ύπαρξη μιας u_2 ως βελτίωση ή διόρθωση της u_1 . Τότε θα χρειαζόταν και μια τρίτη κλιμάκωση του χρόνου, οπότε θα είχαμε:

$$u(t) = u(t_0, t_1, t_2) = u_0(t_0, t_1, t_2) + u_1(t_0, t_1, t_2) + u_2(t_0, t_1, t_2)$$

Με την ίδια λογική και τη συνήθη μαθηματική "αφαίρεση" με "πολλές" κλιμακώσεις του χρόνου θα έπρεπε να αναζητήσουμε λύση στη μορφή:

$$u(t) = u(t_0, t_1, \dots, t_n, \dots) = u_0(t_0, t_1, \dots, t_n, \dots) + u_1(t_0, t_1, \dots, t_n, \dots) + \dots + u_n(t_0, t_1, \dots, t_n, \dots) + \dots$$

δηλαδή

$$u(t) = u(t_0, t_1, \dots, t_n, \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t_0, t_1, \dots, t_n, \dots) \quad (0.2.11)$$

Προκύπτει λοιπόν το πρόβλημα της ομοιόμορφης σύγκλισης σειράς συναρτήσεων (0.2.11). Συνεπώς η προσέγγιση (0.2.10) θα είναι σωστή αν η (0.2.11) συγκλίνει ομοιόμορφα πράγμα το οποίο σημαίνει πρακτικά ότι ο όρος $u_{n+1}(t_0, \dots, t_1, \dots, t_{n+1}, \dots) \ll u_n(t_0, \dots, t_1, \dots, t_n, \dots)$ για κάθε $n=0,1,2,\dots$. Για τη διόρθωση του προβλήματος αυτού κάνουμε μια ανακλιμάκωση της σταθεράς μ στην (9):

$$\mu = \varepsilon \alpha^2$$

ρυθμίζοντας το $\varepsilon > 0$ να είναι μικρό: $0 < \varepsilon \ll 1$. Στη συνέχεια κάνουμε μια κλιμάκωση του χρόνου

$$t_n = \varepsilon^n t$$

με $n = 0, 1, 2, \dots$. Αντί της (11) αναζητούμε λύση στη μορφή:

$$u(t) = u(t_0, t_1, \dots, t_n, \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \cdot u_n(t_0, t_1, \dots, t_n) \quad (0.2.12)$$

Η ομοιόμορφη σύγκλιση της (0.2.12) επιτρέπει την προσέγγιση:

$$u(t) = u(t_0, t_1) = u(t_0, t_1) + \varepsilon u_1(t_0, t_1) + O(\varepsilon^2)$$

αντί της (0.2.10).

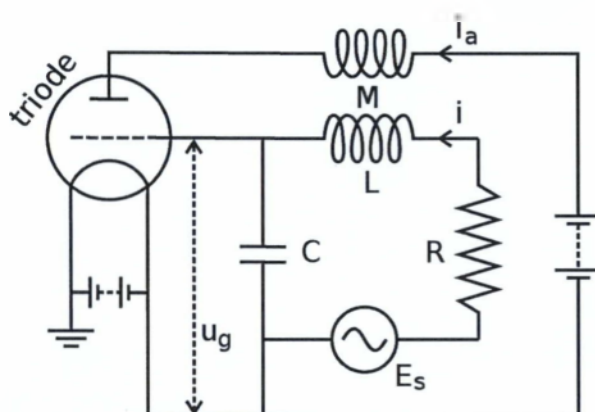
Η μέθοδος αυτής όπως την περιγράψαμε ονομάζεται μέθοδος των πολλαπλών βαθμίδων (multiplied scales) [3]. Δεν είναι η μοναδική μέθοδος διαταραχής, εντούτοις προκύπτει με φυσικό τρόπο από την (0.2.8) και αυτή χρησιμοποιείται παρακάτω στο κεφάλαιο 2. Άλλες μέθοδοι διαταραχής δηλαδή αναζήτηση προσεγγιστικής λύσης στη μορφή σειράς είναι η αφελής (naïve) μέθοδος με κατάλληλη διόρθωση της συχνότητας και η μέθοδος Linstedt-Poincare. Επίσης υπάρχουν και άλλες μέθοδοι όπως η μέθοδος των μέσων όρων Fourier (Fourier averaged method) [1, 2, 3].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ VAN DER POL

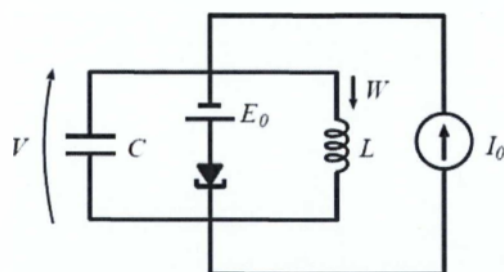
1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο ταλαντωτής van der Pol υπήρξε το πρώτο ηλεκτρονικό κύκλωμα στο οποίο παρατηρήθηκε «χασοτική» συμπεριφορά. Το στοιχείο που εισήγαγε μη γραμμικότητα στο κύκλωμα αυτό (Σχ. 1.1.1) ήταν μια τριόδος ηλεκτρονική λυχνία.



Σχήμα 1.1.1 Κύκλωμα ταλαντωτή van der Pol με τριόδο λυχνία

Με την εφεύρεση της διόδου σήραγγος (tunnel diode), κατέστη δυνατή η σχεδίαση εναλλακτικών υλοποιήσεων (Σχ. 1.1.2).



Σχήμα 1.1.2 Κύκλωμα ταλαντωτή van der Pol με δίοδο σήραγγος

Παρόλα αυτά, η προσεκτική και ακριβής επιλογή των τιμών των στοιχείων των κυκλωμάτων αυτών αποτελεί κρίσιμο παράγοντα στην εμφάνιση της επιθυμητής συμπεριφοράς.

Με τις νεότερες εξελίξεις της μικροηλεκτρονικής, είναι δυνατή η σχεδίαση κυκλωμάτων που εμφανίζουν χασοτική συμπεριφορά με τη χρήση απλών και μικρού κόστους στοιχείων, κατάλληλων για εκπαιδευτικούς σκοπούς.

1.2 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ

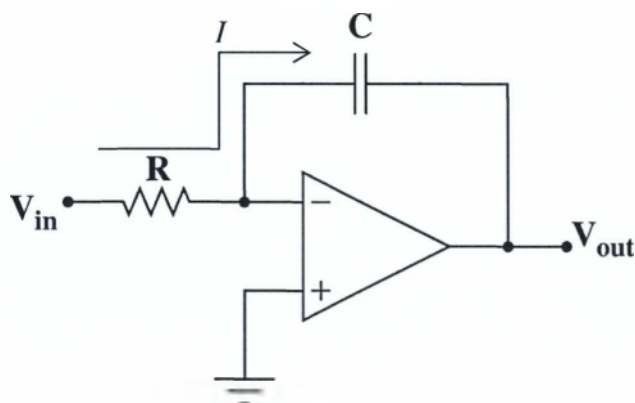
1.2.1 Βασικά Δομικά Στοιχεία

Από τη γενική μορφή της εξίσωσης van der Pol (1) είναι φανερό πως, προκειμένου να σχεδιαστεί ένα κύκλωμα που να την υλοποιεί, θα πρέπει να εξασφαλισθούν οι λειτουργίες της διαφόρισης (x'' , x') και του τετραγωνισμού (x^2).

$$x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0 \quad (i)$$

1.2.1.1 Ολοκληρωτής

Για τη λειτουργία της διαφόρισης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί τελεστικός ενισχυτής γενικού σκοπού σε συνδεσμολογία ολοκληρωτή (Σχ. 1.2.1).



Σχήμα 1.2.1 Κύκλωμα ολοκληρωτή με τελεστικό ενισχυτή

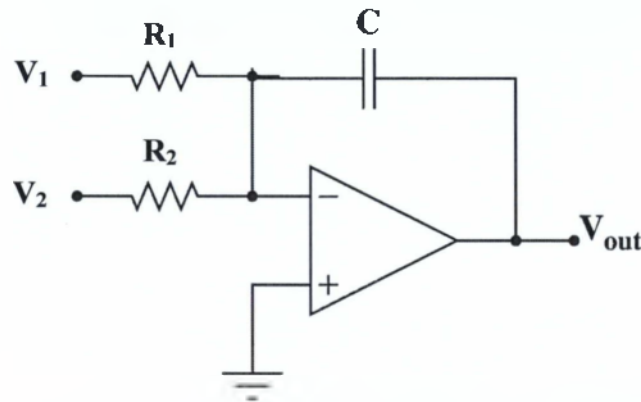
Θα αποδείξουμε ότι η έξοδος του κυκλώματος του σχήματος 1.2.1 είναι ανάλογη του ολοκληρώματος του σήματος εισόδου:

$$\begin{aligned} C &= \frac{dq}{dV} \Rightarrow CdV = dq \Rightarrow C \frac{dV}{dt} = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \\ &\Rightarrow C \frac{dV_{out}}{dt} = -I \Rightarrow C \frac{dV_{out}}{dt} = -\frac{V_{in}}{R} \Rightarrow \\ &\Rightarrow V_{in} dt = -RC dV_{out} \Rightarrow \int V_{in} dt = -RC V_{out} \Rightarrow \\ &\Rightarrow V_{out} = -\frac{1}{RC} \int V_{in} dt. \end{aligned}$$

Ή σε διαφορική μορφή:

$$V_{out} = -\frac{V_{in}}{RC} \quad (ii)$$

Το κύκλωμα του Σχήματος 1.2.2, παραλλαγή του ολοκληρωτή του Σχ. 1.2.1, παρέχει τη δυνατότητα ολοκλήρωσης δύο τάσεων, και περιγράφεται από την εξίσωση (iii).

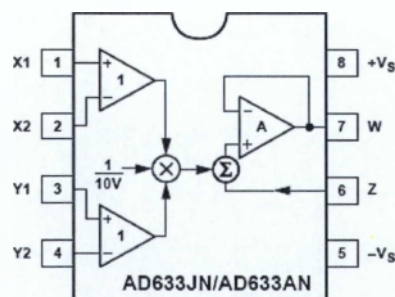


Σχήμα 1.2.2 Κύκλωμα ολοκληρωτή διπλής εισόδου με τελεστικό ενισχυτή

$$V_{out} = -\frac{1}{C} \left(\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} \right) \quad (iii)$$

1.2.1.2 Κύκλωμα Τετραγωνισμού

Απολύτως απαραίτητο για την εμφάνιση μη γραμμικής συμπεριφοράς, το κύκλωμα τετραγωνισμού μπορεί να υλοποιηθεί με τη βοήθεια του ολοκληρωμένου AD633 (Σχ. 1.2.3).



Σχήμα 1.2.3 Το ολοκληρωμένο AD633

Γενικά, το AD633 υλοποιεί τη συνάρτηση $\frac{(X_1 - X_2) \cdot (Y_1 - Y_2)}{10[V]} + Z$ (*)

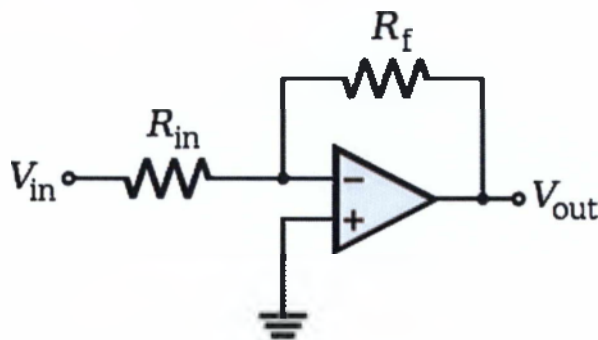
ή αν $Z=0$ την $\frac{(X_1 - X_2) \cdot (Y_1 - Y_2)}{10[V]}$ (**)

(*): $[V] = Volts$

Είναι προφανές πως το τετράγωνο της τιμής μιας τάσης V μπορεί να προκύψει αν θέσουμε $X_1=Y_1=V$ και $X_2=Y_2=Z=0$, οπότε η έξοδος του ολοκληρωμένου θα έχει την τιμή $\frac{V^2}{10}$. Ο δεκαπλασιασμός της τιμής αυτής μπορεί να επιτευχθεί με τη σύνδεση στην έξοδο ενισχυτή με απολαβή ίση με 10, όπως θα εξηγήσουμε στην επόμενη παράγραφο.

Το ίδιο ολοκληρωμένο μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την παραγωγή του γινομένου δύο τάσεων V_1 και V_2 αν θέσουμε στις εισόδους του τις τιμές $X_1=V_1$, $Y_1=V_2$ και $X_2=Y_2=Z=0$, και χρησιμοποιήσουμε ενισχυτή δεκαπλασιασμού της εξόδου, σύμφωνα με αυτά που ήδη αναφέραμε.

1.2.1.3 Κύκλωμα Ενισχυτή Τάσης



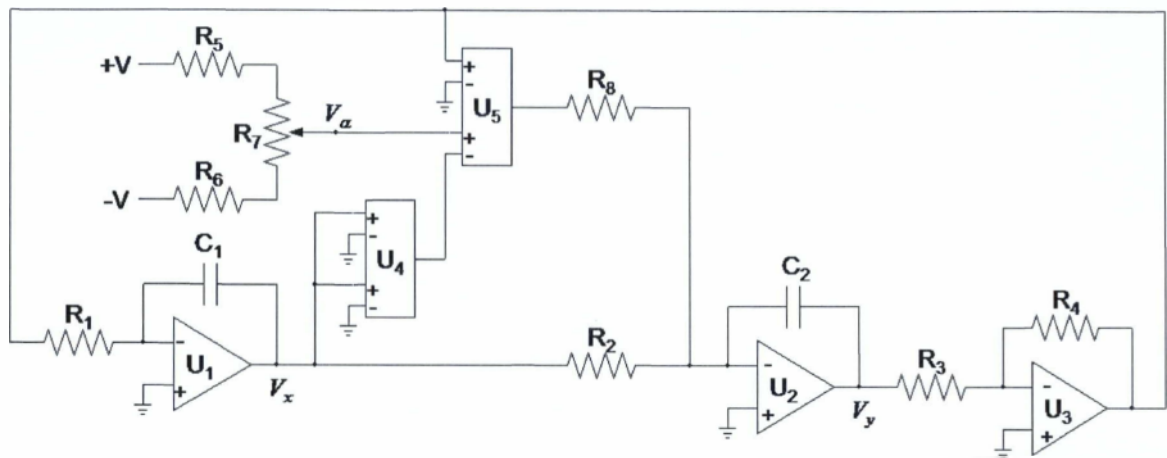
Σχήμα 1.2.4 Αναστρέφων ενισχυτής τάσης με τελεστικό ενισχυτή

Για την κυκλωματική υλοποίηση των συντελεστών της εξίσωσης van der Pol είναι απαραίτητη η χρήση ενισχυτών τάσης. Για το σκοπό αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί αναστρέφουσα συνδεσμολογία τελεστικού ενισχυτή (Σχ. 1.2.4), η έξοδος της οποίας δίδεται από την ακόλουθη σχέση:

$$V_{out} = -\frac{R_f}{R_{in}} V_{in} \quad (iv)$$

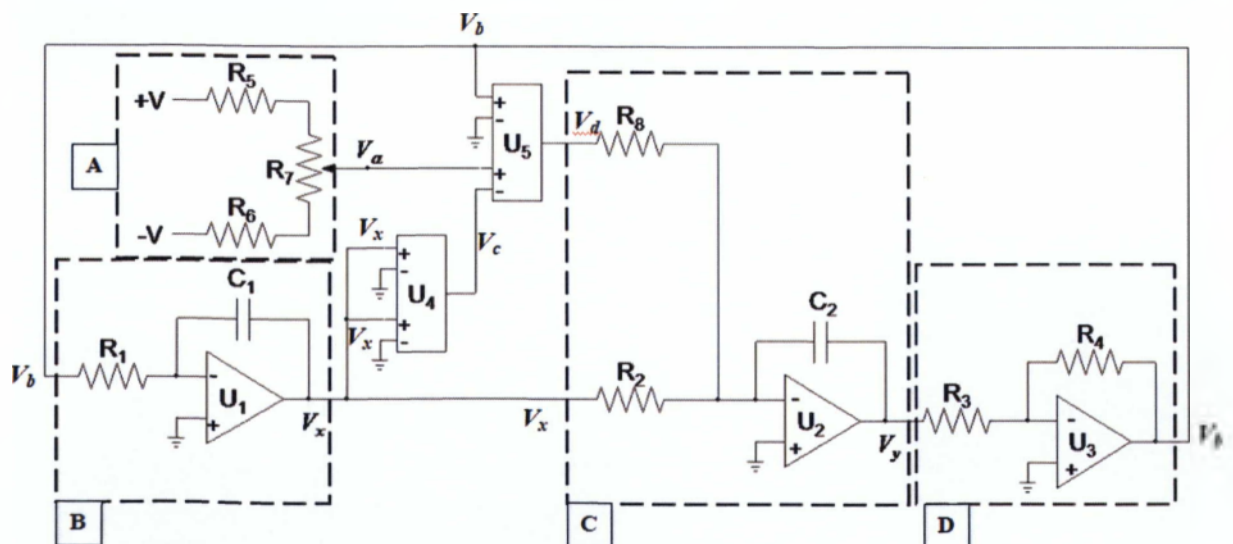
1.3 ΚΥΚΛΩΜΑ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ VAN DER POL

Θα αποδείξουμε ότι το κύκλωμα του Σχήματος 1.3.1 υλοποιεί έναν ταλαντωτή Van der Pol.



Σχήμα 1.3.1 Σχηματικό διάγραμμα ταλαντωτή van der Pol

Το κύκλωμα αποτελείται από τις πιο κάτω βαθμίδες:



Σχήμα 1.3.2 Βαθμίδες κυκλώματος ταλαντωτή van der Pol

όπου

A: Διαιρέτης τάσης: Παράγει την τάση V_a .

B: Ολοκληρωτής (απλός)

C: Ολοκληρωτής (δύο τάσεων)

D: Αναστρέφων ενισχυτής

Με βάση τις σχέσεις (ii)-(iv), οι εξισώσεις για τις τάσεις κάθε βαθμίδας έχουν ως εξής:

B:

$$V_x = -\frac{1}{R_1 C_1} V_b \quad (1)$$

C:

$$V_y = -\frac{1}{C_2} \left(\frac{V_x}{R_2} + \frac{V_d}{R_8} \right) \quad (2)$$

D:

$$V_b = -\frac{R_4}{R_3} V_y \quad (3)$$

U4:

$$V_c = \frac{1}{10[V]} V_x^2 \quad (4)$$

U5:

$$V_d = \frac{V_b (V_a - V_c)}{10[V]} \quad (5)$$

Από τις (1) και (3) προκύπτει:

$$i_x' = \frac{R_4}{R_1 R_3 C_1} V_y \quad (6)$$

Εάν $R_1=R_2=R_3=R_4=R$ και $C_1=C_2=C$, τότε:

η (6) γράφεται:

$$i_x' = \frac{1}{RC} V_y \quad \text{ή} \quad RC i_x' = V_y \quad (6^a)$$

η (2) γράφεται:

$$i_y' = -\frac{1}{C} \left(\frac{V_x}{R} + \frac{V_d}{R_8} \right) \quad (2^a)$$

η (3) γράφεται:

$$V_b = -V_y \quad (3^a)$$

Έχουμε:

$$(2a) \stackrel{(5)}{\Rightarrow} i_y' = -\frac{1}{C} \left(\frac{V_x}{R} + \frac{V_b (V_a - V_c)}{10R_8[V]} \right) \stackrel{(3a)}{\Rightarrow}$$

$$i_y' = -\frac{1}{C} \left(\frac{V_x}{R} - \frac{V_a - V_c}{10R_8[V]} V_y \right) \stackrel{(4)}{\Rightarrow}$$

$$i_y' = -\frac{1}{C} \left(\frac{V_x}{R} - \frac{V_a - \frac{V_x^2}{10[V]}}{10R_8[V]} V_y \right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_y &= -\frac{1}{C} \left(\frac{V_x}{R} - \frac{10V_a[V] - V_x^2}{100R_8[V]^2} V_y \right) \Rightarrow \\
 \dot{V}_y &= \frac{10V_a[V] - V_x^2}{100R_8C[V]^2} V_y - \frac{V_x}{RC} \Rightarrow \\
 \dot{V}_y &= \frac{1}{RC} \left(R \frac{10V_a[V] - V_x^2}{100R_8[V]^2} V_y - V_x \right) \Rightarrow \\
 RC \dot{V}_y &= \frac{R}{100R_8[V]^2} (10V_a[V] - V_x^2) V_y - V_x \quad (7)
 \end{aligned}$$

Από τις (7) και (6^ο) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 R^2C^2 \ddot{V}_x &= \frac{R}{100R_8[V]^2} (10V_a[V] - V_x^2) RC \dot{V}_x - V_x \Rightarrow \\
 R^2C^2 \ddot{V}_x &= \frac{R^2C}{100R_8[V]^2} (10V_a[V] - V_x^2) \dot{V}_x - V_x \Rightarrow \\
 R^2C^2 \ddot{V}_x - \frac{R^2C}{100R_8[V]^2} (10V_a[V] - V_x^2) \dot{V}_x + V_x &= 0 \Rightarrow \\
 \ddot{V}_x - \frac{1}{100R_8C[V]^2} (10V_a[V] - V_x^2) \dot{V}_x + \frac{1}{R^2C^2} V_x &= 0 \quad (8)
 \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $\tau = \frac{t}{RC}$ τότε

$$\dot{V}_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{dV_x}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = V_x' \frac{1}{RC} \quad (9)$$

και, όμοια,

$$V_x'' = V_x'' \frac{1}{R^2 C^2} \quad (10)$$

Αντικαθιστώντας τις (9) και (10) στην (8) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{V_x''}{R^2 C^2} - \frac{1}{100R_8 C [V]^2} (10V_a [V] - V_x^2) \frac{V_x'}{RC} + \frac{1}{R^2 C^2} V_x &= 0 \Rightarrow \\ \frac{1}{R^2 C^2} \left(V_x'' - \frac{R}{100R_8 [V]^2} (10V_a [V] - V_x^2) V_x' + V_x \right) &= 0 \Rightarrow \\ V_x'' - \frac{R}{100R_8 [V]^2} (10V_a [V] - V_x^2) V_x' + V_x &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Θέτοντας

$$\varepsilon = \frac{R}{100R_8 [V]^2}, \quad \alpha^2 = 10V_a [V] \text{ και } V_x = au \text{ η (11) παίρνει τη μορφή}$$

$$x'' + \varepsilon (a^2 x^2 - \alpha^2) x' + x = 0 \Rightarrow x'' + \varepsilon a^2 (x^2 - 1) x' + x = 0$$

Θέτοντας, τελικά, $\mu = \varepsilon a^2$ η εξίσωση γίνεται:

$$\boxed{u'' + \mu(u^2 - 1)u' + u = 0} \quad (\text{εξίσωση Van der Pol})$$

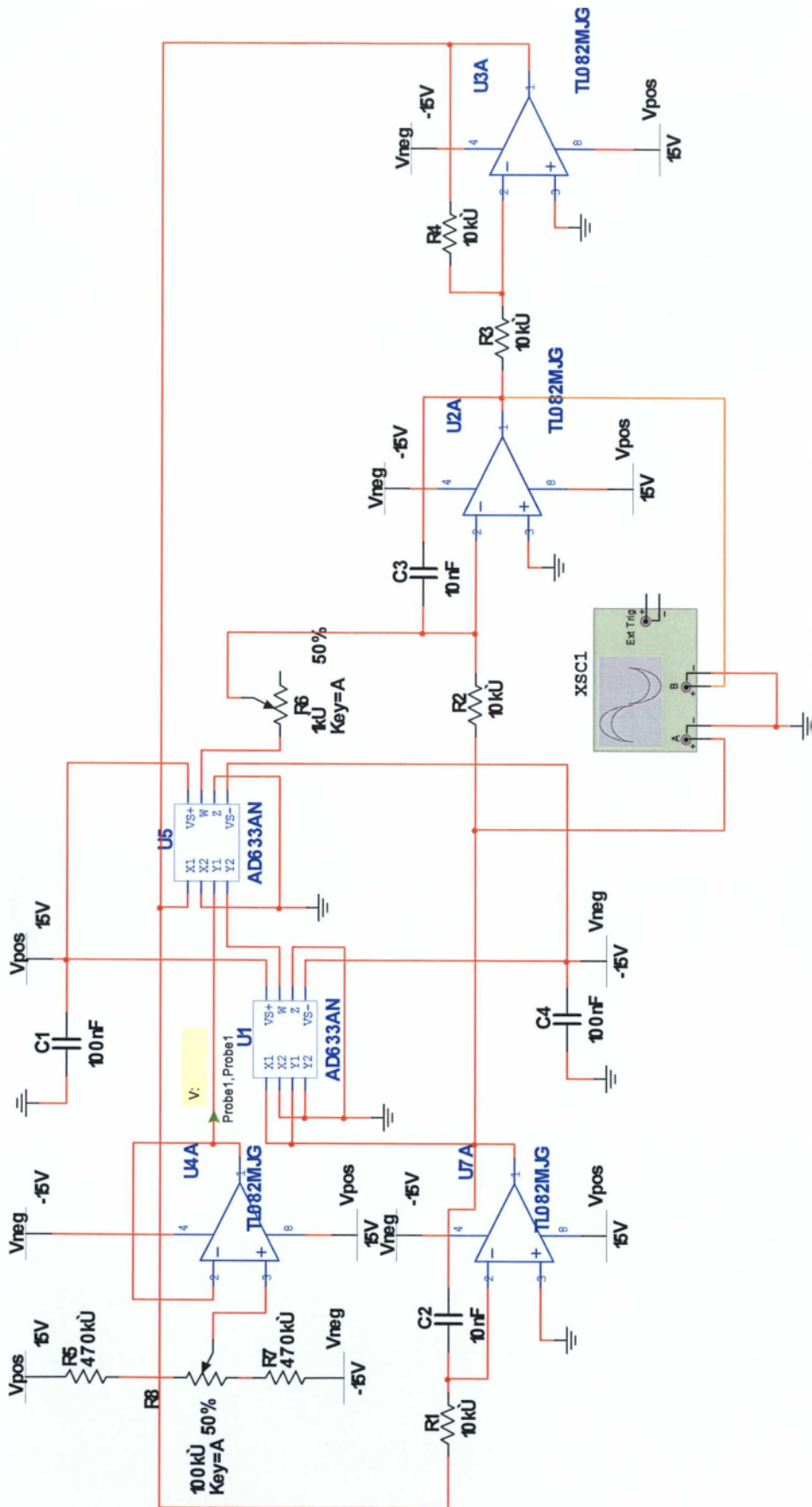
όπου

$$\mu = \frac{RV_a}{10R_8 [V]} \text{ και } u = \frac{V_x}{\sqrt{10V_a [V]}}$$

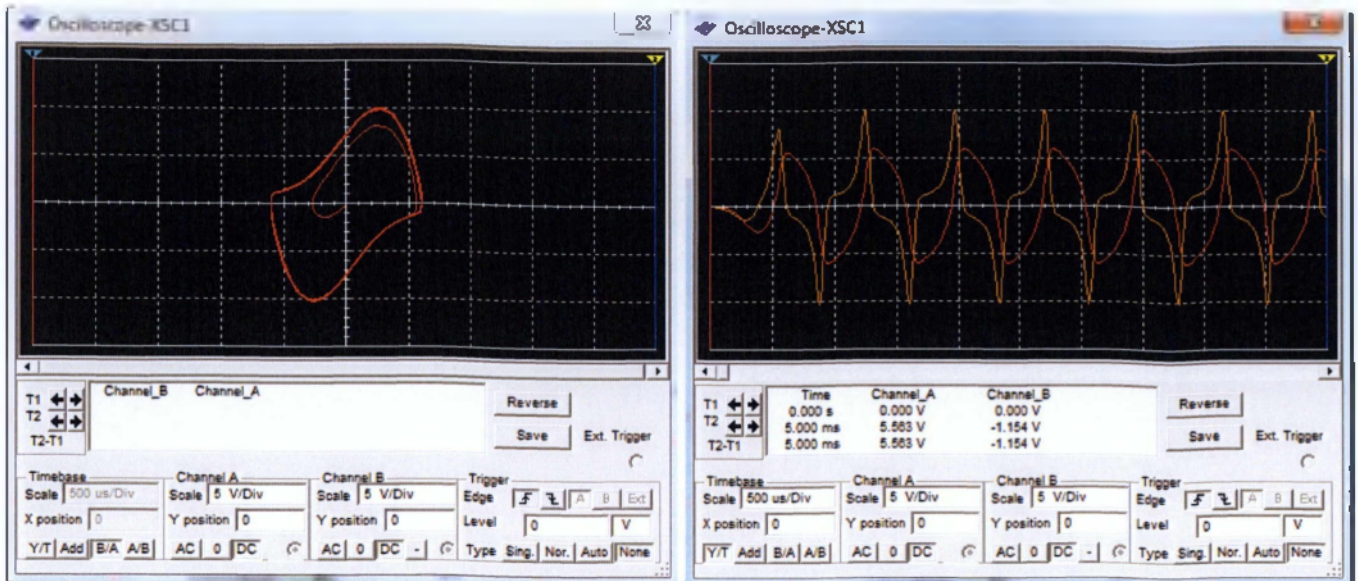
1.4 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ

Το κύκλωμα του Σχήματος 1.3.1 προσομοιώθηκε με το πακέτο λογισμικού Multisim. Οι τιμές των στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν φαίνονται στο Σχήμα 1.4.1. Ο τελεστικός ενισχυτής μεταξύ του διαιρέτη τάσης και του AD633 λειτουργεί ως απομονωτής (buffer). Οι πυκνωτές των 100nF τοποθετήθηκαν για λόγους αποσύζευξης των τάσεων τροφοδοσίας.

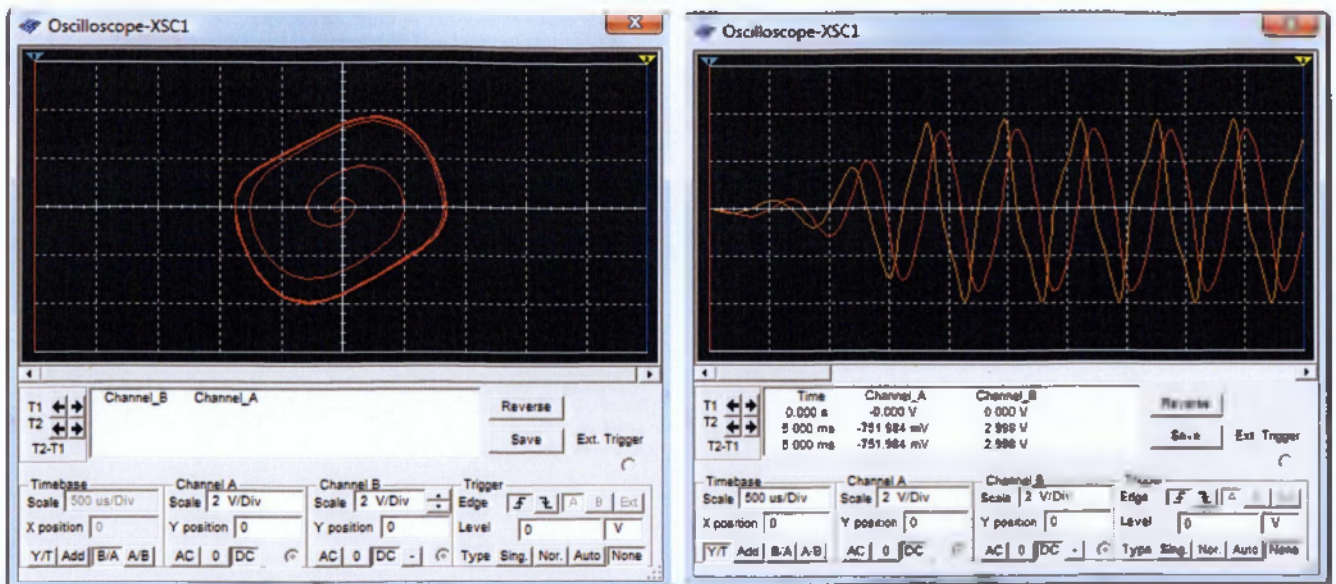
Μεταβάλλοντας την τιμή της τάσης V_a με τη βοήθεια του ποτενσιομέτρου των 100k Ω , μπορούμε να πάρουμε το διάγραμμα φάσεων του κυκλώματος (με τον παλμογράφο σε λειτουργία X-Y) για τυπικές τιμές της παραμέτρου μ καθώς και την αντίστοιχη χρονική του απόκριση (Σχήμα 1.4.2).



Σχήμα 1.4.1 Πρακτικό κύκλωμα ταλαντωτή van der Pol



$V_{\sigma} = 865\text{mV}$



$V_{\sigma} = 288\text{mV}$

Σχήμα 1.4.2 Αποτελέσματα προσομοίωσης κυκλώματος ταλαντωτή van der Pol

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2**ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ VAN DER POL****2.1 ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ VAN DER POL .
ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΦΑΣΕΩΝ.**

Η διαφορική εξίσωση που διέπει τη συμπεριφορά του κυκλώματος είναι:

$$u'' + \mu(u^2 - 1)u' + u = 0 \quad (2.1.1)$$

όπου $u=u(\tau)$ το πλάτος της τάσης, ενώ

$$u' = \frac{du}{d\tau}, \quad u'' = \frac{d^2u}{d\tau^2}, \quad \mu = \varepsilon\alpha^2$$

Η διαφορική εξίσωση (2.1.1) καλείται εξίσωση Van der Pol και είναι δευτέρας τάξεως μη γραμμική. Υπενθυμίζουμε ότι η σταθερά $\mu = \varepsilon \cdot \alpha^2 > 0$ ρυθμίζεται από τα δεδομένα του κυκλώματος.

Η εξίσωση (2.1.1) μοιάζει με έναν ταλαντωτή, αλλά με μη γραμμική απόσβεση, η οποία παρίσταται από τον όρο $\mu(u^2 - 1) \cdot u'$. Ο όρος αυτός δρα αποσβεστικά (όπως ακριβώς στο γραμμικό μοντέλο ταλάντωση με απόσβεση) όταν $|u| > 1$, δηλαδή μειώνει το πλάτος της ταλάντωσης όμως όταν $|u| < 1$ δρα ενισχυτικά, δηλαδή αυξάνει το πλάτος της ταλάντωσης όταν αυτό γίνεται πολύ μικρό.

Συνεπώς το φαινόμενο το οποίο παρίσταται από την εξίσωση (2.1.1) έχει το εξής χαρακτηριστικό: Μεγάλο πλάτος οδηγείται σε απότομη μείωση, αλλά όταν το πλάτος γίνεται πολύ μικρό αμέσως ανατροφοδοτείται. Δηλαδή το όλο σύστημα υπόκειται σε μια "αυτό-ανατροφοδοτούμενη" ταλάντωση όπου η ενέργεια, η οποία καταναλώνεται, εξισορροπεί την ενέργεια η οποία αντλείται μέσα σε μια περίοδο.

Για την ποιοτική της μελέτη είναι αναγκαίο να μετατρέψουμε την (2.1.1) σε ένα σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως ως εξής:

Η εξίσωση (2.1.1) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$u'' = \mu(1 - u^2) \cdot u' - u = \mu[(\mu(1 - u^2)) \cdot u - \frac{u}{\mu}] \quad (2.1.2)$$

θέτοντας :

$$v' = -\frac{u}{\mu}$$

και δεδομένου ότι:

$$(1-u^2)u' = \frac{d}{d\tau} \left(u - \frac{u^3}{3} \right)$$

η (2) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$u'' = \mu \frac{d}{d\tau} \left(u + \nu - \frac{u^3}{3} \right) \quad (2.1.3)$$

Συνεπώς η εξίσωση (3.1.1) είναι ισοδύναμη με το σύστημα :

$$u' = \mu \left(u + \nu - \frac{u^3}{3} \right), \quad \nu' = -\frac{u}{\mu}, \quad (2.1.4)$$

όπου η σταθερά ολοκλήρωσης είναι μηδέν λόγω των μηδενικών αρχικών συνθηκών που ικανοποιούνται από τις λύσεις. Αναζητούμε τα σημεία ισορροπίας (equilibrium points) για το σύστημα (3.1.4), τα οποία προκύπτουν όταν $u'=0, \nu'=0$, δηλαδή από τη λύση του αλγεβρικού συστήματος:

$$\mu \left(u + \nu - \frac{u^3}{3} \right) = 0, \quad -\frac{u}{\mu} = 0 \quad (2.1.5)$$

Το σύστημα (5) έχει μοναδική λύση την:

$$(u_0, \nu_0) = (0, 0)$$

Για να βρούμε το είδος ευστάθειας του σημείου ισορροπίας, θεωρούμε το αντίστοιχο γραμμικοποιημένο σύστημα:

$$\begin{pmatrix} u' \\ \nu' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ \nu \end{pmatrix}$$

το οποίο αντιστοιχεί στο μη γραμμικό σύστημα (3.1.4) όπου:

$$A = J(0, 0)$$

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$f_1(u, v) = \mu(u + v - (\frac{u^3}{3})), \quad f_2(u, v) = -\frac{u}{\mu}$$

Επομένως

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} \mu(1 - u^2) & \mu \\ -\frac{1}{\mu} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = J(0, 0) = \begin{pmatrix} \mu & \mu \\ -\frac{1}{\mu} & 0 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς το γραμμικοποιημένο σύστημα, το οποίο αντιστοιχεί στο (2.1.4) είναι

$$u' = \mu(u + v), \quad v' = \frac{u}{\mu}$$

(2.1.6)

με σημείο ισορροπίας το (0,0). Για το είδος του σημείου ισορροπίας βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A [1]:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \mu - \lambda & \mu \\ -\frac{1}{\mu} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \mu\lambda + 1$$

με ρίζες:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2} = \frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 - 1}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- ❖ Αν $\mu^2 - 4 > 0$, δηλαδή $\mu > 2$ (δεδομένου ότι $\mu > 0$) τότε έχουμε δυο πραγματικές ιδιοτιμές και μάλιστα θετικές, οπότε το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ είναι για το σύστημα (6) ασταθές και αυτό τοπικά ισχύει και για το σύστημα (2.1.4)
- ❖ Αν $\mu^2 - 4 < 0$, δηλαδή $0 < \mu < 2$ (δεδομένου ότι $\mu > 0$) τότε έχουμε δύο συζυγείς μιγαδικές ιδιοτιμές με θετικό πραγματικό μέρος οπότε το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ είναι για το σύστημα (2.1.6) ασταθής κόμβος και αυτό τοπικά ισχύει και για το σύστημα (4)
- ❖ Αν $\mu^2 - 4 = 0$, δηλαδή $\mu = 2$ (δεδομένου ότι $\mu > 0$) τότε η γνώση του σημείου ισορροπίας $(0,0)$ για το σύστημα (2.1.6) δεν εγγυάται την τοπική συμπεριφορά του συστήματος (2.1.4).

Εξετάζουμε την συμπεριφορά του συστήματος για μεγάλα μ , δηλαδή για μεγάλα $\alpha > 0$.

Θεωρούμε την ποσότητα

$$\beta = \frac{1}{\mu^2}$$

οπότε β αρκετά μικρός θετικός αριθμός. Τότε:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$$

Εισάγουμε μια αργή κλιμάκωση του χρόνου:

$$T_1 = \frac{\tau}{\mu} = \sqrt{\beta} \tau$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας έπεται ότι

$$\frac{dT}{d\tau} = \sqrt{\beta} \quad , \quad u' = \frac{du}{d\tau} = \sqrt{\beta} \frac{du}{dT_1} \quad , \quad v' = \frac{dv}{d\tau} = \sqrt{\beta} \frac{dv}{dT_1}$$

Τότε το σύστημα (2.1.4) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή:

$$\left. \begin{aligned}
 \sqrt{\beta} \cdot \frac{dv}{dT_1} &= \mu \left(v + u - \frac{u^3}{8} \right) \\
 \sqrt{\beta} \cdot \frac{dv}{dT_1} &= -\frac{u}{\mu}
 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned}
 \beta \cdot \frac{dv}{dT_1} &= u + v - \frac{u^3}{3} \\
 \frac{dv}{dT_1} &= -u
 \end{aligned}$$

(2.1.7)

Στην οριακή κατάσταση καθώς $\beta \rightarrow 0$ το σύστημα (2.1.7) γράφεται στη μορφή

$$u + v - \frac{u^3}{3} = 0, \quad \frac{dv}{dT_1} = -u$$

ή ισοδύναμα:

$$v = \frac{u^3}{3} - u, \quad \frac{dv}{dT_1} = -u$$

(2.1.8)

Η εξίσωση

$$v = \frac{u^3}{3} - u$$

(2.1.8^a)

καλείται καμπύλη «μηδενικής ταχύτητας» και παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην παράσταση του συστήματος στο επίπεδο φάσεων.

Οι σχέσεις (2.1.8) ουσιαστικά δίνουν την διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dT_1} \left(\frac{u^3}{3} - u \right) = -u$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{du}{dT_1} = \frac{u}{1-3u^3}$$

(2.1.9)

Εισάγουμε τώρα μια γρήγορη κλιμάκωση του χρόνου

$$T_2 = \mu\tau = \frac{\tau}{\sqrt{\beta}}$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε:

$$\frac{dT_1}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}, \quad u'(\tau) = \frac{du}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{du}{dT_2}, \quad v(\tau) = \frac{dv}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{dv}{dT_2}$$

Τώρα το σύστημα (2.1.4) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\beta}} \cdot \frac{du}{dT_2} &= \mu(u+v - \frac{v^3}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{\beta}} \cdot \frac{dv}{dT_2} &= \frac{v}{\mu} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{du}{dT_2} &= u + v - \frac{v^3}{3} \\ \frac{dv}{dT_2} &= -\beta \cdot v \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Στην οριακή κατάσταση καθώς $\beta \rightarrow 0$ το σύστημα (2.1.10) γράφεται στη μορφή

$$\frac{du}{dT_2} = u + v - \frac{v^3}{3} \quad \frac{dv}{dT_2} = 0 \quad (2.1.11)$$

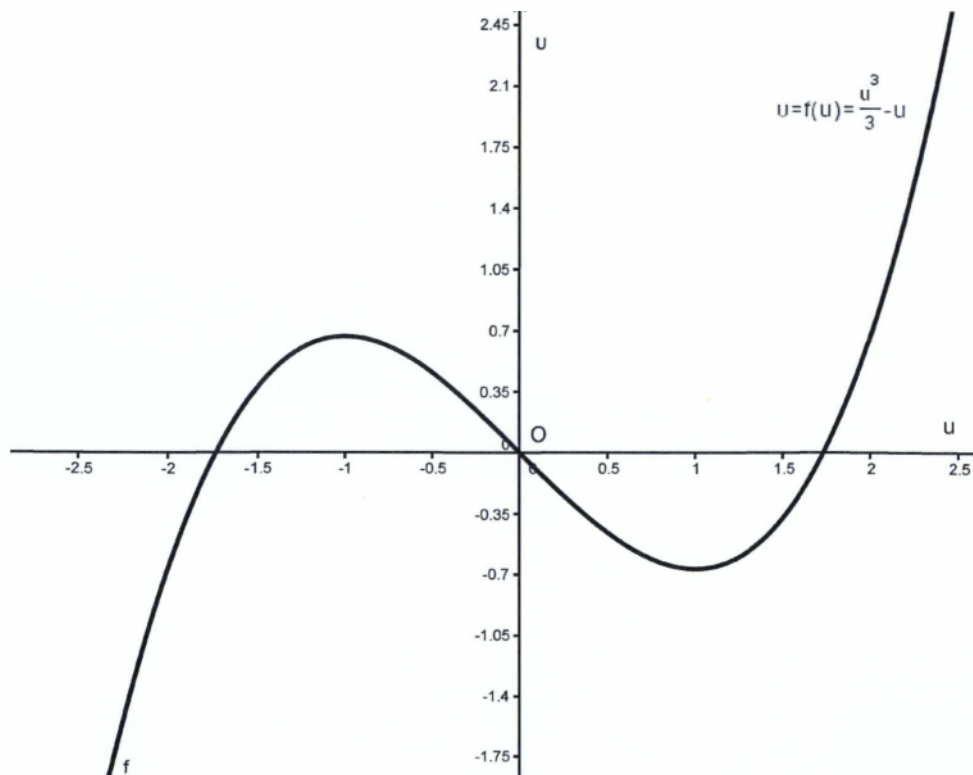
η δεύτερη εξίσωση του συστήματος (2.1.11) λύνεται άμεσα και δίνει

$$v(T_2) = c \quad (2.1.12)$$

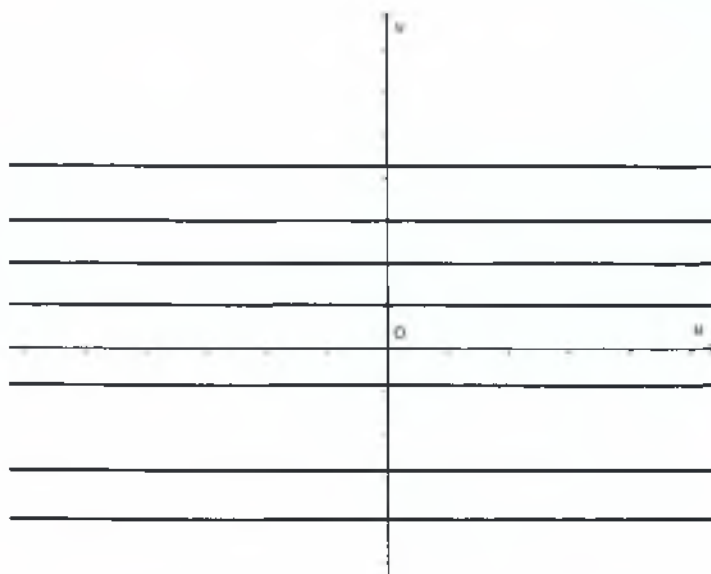
όπου c σταθερά. Η ευθεία (2.1.12) είναι και αυτή καμπύλη «μηδενικής ταχύτητας». Τότε η πρώτη από τις (2.1.10) είναι ισοδύναμη με την διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dv}{dT_2} = c + u - \frac{u^3}{3}$$

Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω σχεδιάζουμε στο επίπεδο των φάσεων (u - v) τις δύο παραπάνω περιπτώσεις (αργή και γρήγορη κλιμάκωση του χρόνου):

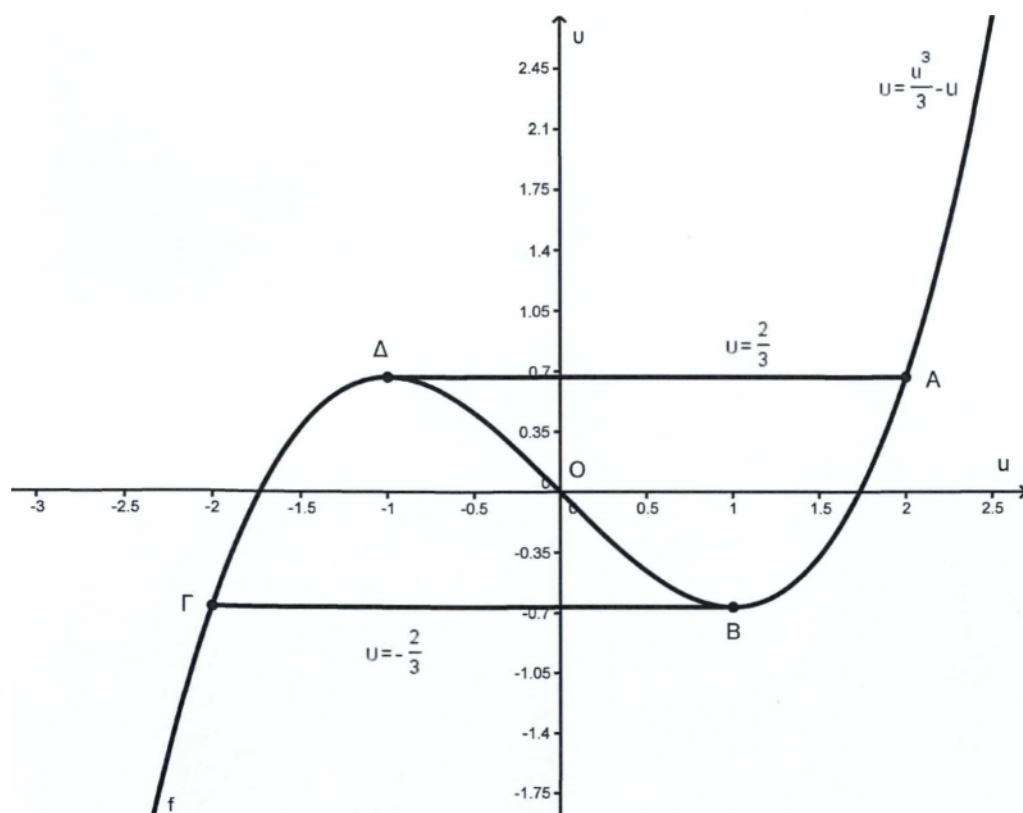


Σχήμα 2.1.1 Παράσταση $u=f(u)$ στον αργό χρόνο $T_1 = \sqrt{\beta} \cdot \tau = \frac{\tau}{\mu}$



Σχήμα 2.1.2 Παράσταση $u=f(u)$ στο γρήγορο χρόνο, $T_1 = \mu \cdot \tau = \frac{\tau}{\sqrt{\beta}}$

Συνδυάζοντας τα δυο παραπάνω γραφήματα σε ένα έχουμε



Σχήμα 2.1.3 Ο οριακός κύκλος Van der Pol στο χώρο φάσεων

Η κλειστή καμπύλη που σχηματίζεται στο σχήμα 2.1.3 και περιβάλλει το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ ονομάζεται οριακός κύκλος (limit cycle) και είναι χαρακτηριστικό των μη γραμμικών συστημάτων.

Οι ευθείες $u=const$, πάνω στις οποίες εξελίσσεται το φαινόμενο στο γρήγορο χρόνο T_2 διέρχονται από τα ακρότατα της καμπύλης $u=f(u)$, πάνω στην οποία εξελίσσεται το φαινόμενο σε αργό χρόνο T_1 .

Τα σημεία αυτά δίνονται από τις συνθήκες

$$f'(u) = 0 \text{ και } f''(u) \neq 0$$

όπου

$$f(u) = u^2 - 1 \text{ και } f'(u) = 2u$$

Επομένως

$$f'(u) = 0 \text{ ή } u^2 - 1 = 0 \text{ ή } u = 1, u = -1$$

$$f''(1) = 2, f''(-1) = -2$$

$$f(1) = \frac{-2}{3}, f(-1) = \frac{2}{3}.$$

Άρα το σημείο $(-1, \frac{2}{3})$ η f παρουσιάζει μέγιστο ενώ στο $(1, \frac{-2}{3})$ ελάχιστο.

Τέλος βρίσκουμε και τα σημεία τομής των ευθειών $v = \frac{2}{3}$ και $v = \frac{-2}{3}$ με την καμπύλη $v=f(u)$

$$\frac{2}{3} = \frac{u^3}{3} - u \Rightarrow u^3 - 3u - 2 = 0 \Rightarrow (u - 2)(u - 1)^2 = 0$$

$$-\frac{2}{3} = \frac{u^3}{3} - u \Rightarrow u^3 - 3u + 2 = 0 \Rightarrow (u + 2)(u - 1)^2 = 0$$

Και στις δύο περιπτώσεις η διπλή ρίζα αντιστοιχεί στο σημείο επαφής με την ευθεία στα ακρότατα ενώ για τις διπλές ρίζες έχουμε:

$$u = 2, u = -2$$

Από την πρώτη εξίσωση του συστήματος συμπεραίνουμε τα εξής:
Όταν

$$\frac{du}{d\tau} > 0 \Leftrightarrow u - f(u) = 0 \Leftrightarrow u > f(u) = \frac{u^3}{3} - u,$$

δηλαδή το σημείο (u, u) κείται πάνω από την καμπύλη «μηδενικής ταχύτητας».
Όταν

$$\frac{du}{d\tau} < 0 \Leftrightarrow u - f(u) = 0 \Leftrightarrow u < f(u) = \frac{u^3}{3} - u,$$

δηλαδή το σημείο (u, u) κείται κάτω από την καμπύλη «μηδενικής ταχύτητας».

Οι τροχιές (trajectories) έχουν διεύθυνση προς τα πάνω όταν $u < 0$ και προς τα κάτω όταν $u > 0$.

Περιγράφουμε την αναπαράσταση του φαινομένου στο χώρο των φάσεων:

Δίνεται μια αρχική συνθήκη $(u_0, v_0) \neq (0, 0)$ δηλαδή ένα σημείο στο επίπεδο (u, v) . Η τροχιά που αρχίζει από το σημείο (u_0, v_0) πρώτα θα πλησιάσει τον οριακό κύκλο κατά την οριζόντια διεύθυνση σε χρόνο τα της τάξης $\frac{1}{\mu} = \sqrt{\beta}$ (συμβολίζουμε $t = O(\frac{1}{\mu})$) δηλαδή γρήγορα. Τότε θα κινηθεί πάνω στην καμπύλη (στο κομμάτι που αντιστοιχεί στην $v = f(u)$) σε μικρή απόσταση σε χρόνο τα της τάξης $\mu = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ (συμβολίζουμε $t = O(\mu)$), δηλαδή αργά μέχρι να φτάσει στο σημείο επιστροφής.

Εφόσον οι εξισώσεις απαγορεύουν να ακολουθήσει η τροχιά την καμπύλη «μηδενικής ταχύτητας» $v = f(u)$ γίνεται άλμα δηλαδή σε γρήγορο χρόνο διατρέχει το κομμάτι $v = const$ και συνεχίζει αργά στον άλλο κλάδο της καμπύλης $v = f(u)$, οπότε το φαινόμενο επαναλαμβάνεται.

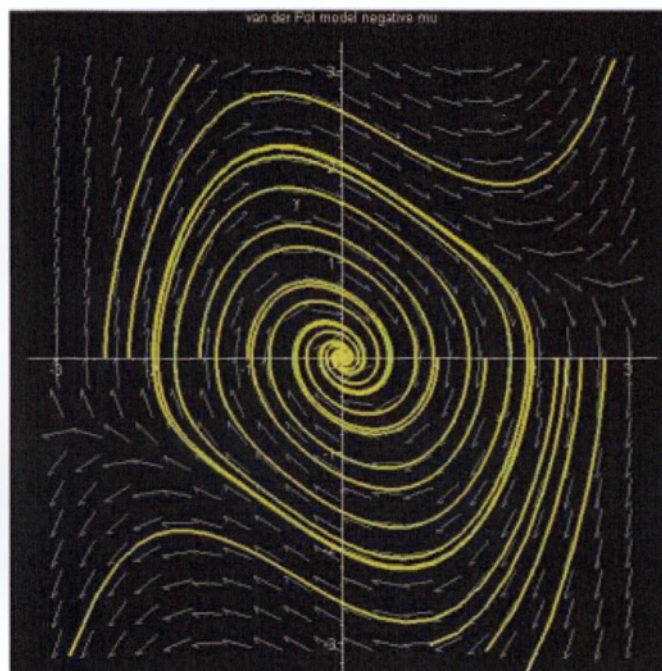
Σημειώνουμε τα εξής

1. Τροχιές (trajectories), οι οποίες αντιστοιχούν σε διαφορετικές αρχικές συνθήκες (u_0, v_0) δεν τέμνονται ποτέ (βέβαια μέχρι τη σύγκλιση τους στον οριακό κύκλο). Αυτό επιβάλλεται άλλωστε από το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεως μιας διαφορικής εξίσωσης σε περιοχή της αρχικής συνθήκης.
2. Ακόμα και για αρχική συνθήκη (u_0, v_0) μακριά από το σημείο ισοροπίας $(0, 0)$ δηλαδή έξω από τον οριακό κύκλο, η τροχιά διαγράφεται όπως περιγράφηκε παραπάνω και κατά τον ίδιο τρόπο συγκλίνει στον οριακό κύκλο.

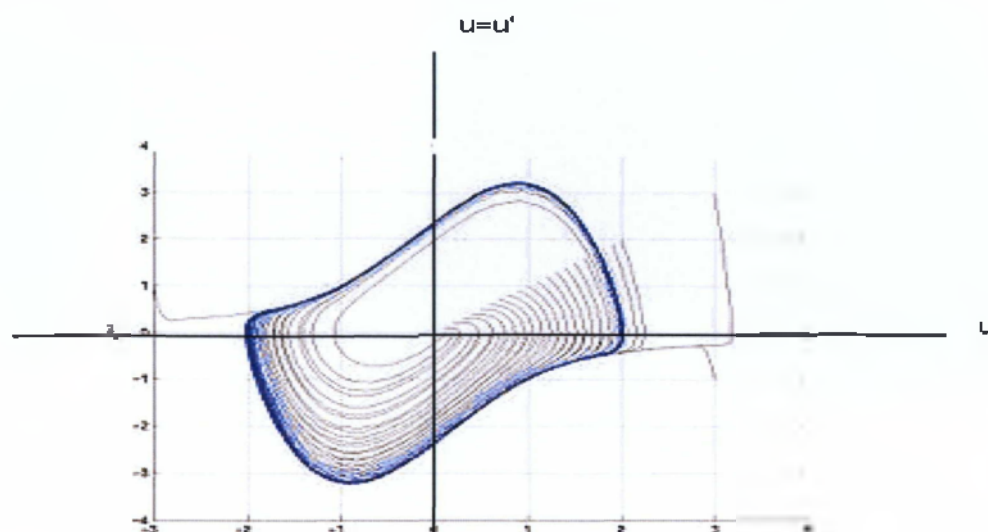
Λέμε τότε ότι πρόκειται για ευσταθή οριακό κύκλο (stable limit cycle).

3. Η ύπαρξη ευσταθούς οριακού κύκλου στο διάγραμμα των φάσεων προβλέπεται και από μια γενικότερη μαθηματική θεωρία στην οποία εμπίπτει η διαφορική εξίσωση Van der Pol (2.1.1). Αυτή συνοψίζεται στο θεώρημα Lienard (A.2).

Παρακάτω δίνονται ο χώρος φάσεων για διάφορες τιμές της παραμέτρου μ .



Σχήμα 2.1.4 Ο οριακός κύκλος Van der Pol στο χώρο φάσεων Για $0 < \mu < 2$ και $\Delta < 0$



Σχήμα 2.1.5 Ο οριακός κύκλος Van der Pol στο χώρο φάσεων για $\mu > 2$ και $\Delta > 0$

Τέλος θεωρώντας ότι το όλο φαινόμενο εξελίσσεται μόνο στους δύο κλάδους της καμπύλης $v = f(u)$, οι οποίοι είναι και συμμετρικοί μπορούμε να υπολογίσουμε την περίοδο της ταλάντωσης. Πράγματι από την εξίσωση (2.1.9) ολοκληρώνοντας προκύπτει ότι :

$$2 \int_{\tau_A}^{\tau_B} dT = 2 \int_{\tau_A}^{\tau_B} \frac{d\tau}{\mu} = 2 \int_2^1 \frac{1-3u^2}{u} du = 2 \int_2^1 \left(\frac{1}{u} - 3u \right) du$$

Δηλαδή

$$T = -2 \mu \int_1^2 \left(\frac{1}{u} - 3u \right) du = \mu (3 - \ln 2)$$

Η εξίσωση Van der Pol (2.1.1) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή:

$$u'' + u = \mu(1 - u^2)u'$$

οπότε πολλαπλασιάζοντας την με u' καταλήγουμε στη μορφή

$$\frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{2} (u')^2 + \frac{1}{2} u^2 \right] = \mu(1-u^2)(u')^2 \quad (2.1.13)$$

Βάσει ενός μηχανικού αναλόγου το πρώτο μέλος της (2.1.13) εκφράζει μεταβολή της ενέργειας. Συνεπώς

$$\frac{dE}{d\tau} = \mu(1-u^2)(u')^2$$

όπου $u'^2 > 0$. Τότε

$$\frac{dE}{d\tau} < 0 \Leftrightarrow 1-u^2 < 0 \Leftrightarrow u > 1 \text{ ή } u < -1$$

Αντίστοιχα

$$\frac{dE}{d\tau} > 0 \Leftrightarrow 1-u^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < u < 1$$

άρα σε κάθε τροχιά με αρχική συνθήκη (u_0, v_0) με $u_0 < -1$ ή $u_0 > 1$ η ενέργεια συνεχώς κατά μήκος της τροχιάς αυτής οπότε προκαλείται μείωση στο πλάτος μέχρι η αρχική να εξαντληθεί. Τότε πλησιάζουμε στο σημείο $(0,0)$ του χώρου φάσεων. Επειδή όμως για $|u| < 1$ η ενέργεια αυξάνει, το πλάτος πάλι αρχίζει και αυξάνει.

2.2 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ VAN DER POL

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση Van der Pol στη μορφή :

$$u'' + u - \varepsilon \alpha^2 u' + \varepsilon \alpha^2 u^2 u' = 0 \quad (2.2.1)$$

Η προηγούμενη μελέτη έδειξε ότι όλο το φαινόμενο εξελίσσεται τουλάχιστον σε δύο κλιμακούμενες χρονικές στιγμές: Η μορφή των τροχιών στο χώρο φάσεων δείχνει ότι το πλάτος της σπείρας αυξάνει πολύ αργά σε σχέση με τον αριθμό των κύκλων.

Μια αναλυτική - προσεγγιστική μέθοδος διαταραχής που χρησιμοποιεί αυτή την κλιμάκωση του χρόνου, στη συγκεκριμένη περίπτωση δύο χρονικές κλίμακες, ονομάζεται μέθοδος των πολλαπλών κλιμάκων (ή βαθμιδών) [3] και δεδομένου της φυσικής - γεωμετρικής ερμηνείας στο χώρο φάσεων, παράγει καλύτερες προσεγγίσεις από άλλες μεθόδους διαταραχών.

Θεωρούμε δύο κλίμακες του (αδιάστατου) χρόνου τ :

$$T_n = \varepsilon^n \tau, \quad n = 0, 1 \quad (2.2.2)$$

Δηλαδή: $T_0 = \tau$: γρήγορος χρόνος, $T_1 = \varepsilon \cdot \tau$: αργός χρόνος, όπου $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό: $0 < \varepsilon \ll 1$. Σημειώνουμε δε πως η μικρή αυτή παράμετρος κλιμάκωσης προέρχεται από τα δεδομένα του ταλαντωτή:

$$\varepsilon = \frac{R}{100R_s}$$

Στη συνέχεια θεωρούμε τη λύση $u(\tau)$ της (1) σαν διαταραχή μιας $u_0(\tau)$ δηλαδή αναπτύσσουμε στην $u(\tau)$ σε μορφή σειράς:

$$u(\tau) = u_0(\tau) + \varepsilon u_1(\tau) + O(\varepsilon^2)$$

ή

$$u(T_0, T_1) = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + O(\varepsilon^2) \quad (2.2.3)$$

το οποίο σημαίνει πως οτιδήποτε πολλαπλασιάζεται με τον όρο ε^n για $n \geq 2$ θεωρείται πρακτικά αμελητέο, δηλαδή τείνει στο μηδέν. Εφόσον η (2.2.3) είναι η λύση της (2.2.1) σημαίνει ότι αν αντικαταστήσουμε την (2.2.3) στη (2.2.1) προκύπτει ταυτότητα.

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε :

$$u'(\tau) = \frac{du}{d\tau} = \frac{\partial u}{\partial T_0} \cdot \frac{dT_0}{d\tau} + \frac{\partial u}{\partial T_1} \cdot \frac{dT_1}{d\tau} = \frac{\partial u}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial T_1}$$

και αντίστοιχα :

$$u''(\tau) = \frac{d^2u}{d\tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial T_0 \partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial T_1^2}$$

Εισάγοντας τους τελεστές

$$D_i = \frac{\partial}{\partial T_i}, \quad D_i^2 = \frac{\partial^2}{\partial T_i^2} \quad i=0,1$$

έχουμε τελικά ότι:

$$u' = D_0 u + \varepsilon D_1 u \quad \text{και} \quad u'' = D_0^2 u + 2\varepsilon D_0 D_1 u + o(\varepsilon^2)$$

καθώς και

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + o(\varepsilon^2)$$

(2.2.4)

Με αντικατάσταση των σχέσεων (2.2.4) στη διαφορική εξίσωση (2.2.1) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} & D_0^2 (u_0 + \varepsilon u_1) + 2\varepsilon D_0 D_1 (u_0 + \varepsilon u_1) + (u_0 + \varepsilon u_1) - \\ & - \varepsilon \alpha^2 [D_0 (u_0 + \varepsilon u_1) + \varepsilon D_1 (u_0 + \varepsilon u_1)] + \\ & + \varepsilon \alpha^2 (u_0 + \varepsilon u_1)^2 [D_0 (u_0 + \varepsilon u_1) + \varepsilon D_1 (u_0 + \varepsilon u_1)] = 0 \end{aligned}$$

Εκτελώντας τις πράξεις και αγνοώντας κάθε όρο που πολλαπλασιάζεται με ε^n για $n \geq 2$ προκύπτει ότι

$$D_0^2 u_0 + u_0 + \varepsilon [D_0^2 u_1 + 2D_0 D_1 u_0 + u_1 - \alpha^2 D_0 u_0 + \alpha u_0^2 D_0 u_0] = 0$$

(2.2.5)

Η σχέση (2.2.5) είναι ταυτότητα ως προς $\varepsilon > 0$, οπότε ισχύει αν και μόνο αν

$$(2.2.6) \quad D_o^2 u_o + u_o = 0$$

και

$$(2.2.7) \quad D_o^2 u_1 + u_1 = \alpha^2 u_o D_o u_o - 2D_1 D_o u_o$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι η μη γραμμική διαφορική εξίσωση (2.2.1) είναι ίση με το σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (2.2.6) και (2.2.7) (που είναι ανεξάρτητο του ε). Η λύση του συστήματος των (2.2.6) και (2.2.7) δίνει την προσεγγιστική λύση της (2.2.1) με ακρίβεια τάξης ε .

Προχωρούμε στη μελέτη του συστήματος των εξισώσεων (2.2.6) και (2.2.7). Η λύση της (2.2.6) είναι γνωστή και γράφεται σε εκθετική μορφή ως εξής:

$$u_o(T_o, T_1) = A(T_1)e^{iT_o} + \overline{A(T_1)}e^{-iT_o}$$

ή

$$(2.2.8) \quad u_o(T_o, T_1) = A(T_1)e^{iT_o} + cct$$

όπου cct συζυγής μιγαδικός όρος (conjugate complex term). Το πλάτος $A(T_1)$ είναι μια σταθερά ως προς τη μεταβλητή T_o , εξαρτάται ενδεχομένως από τη μεταβλητή T_1 . Στη συνέχεια αντικαθιστούμε την (2.2.8) στο δεύτερο μέλος της (2.2.7). Λαμβάνοντας υπ'όψιν ότι:

$$\begin{aligned} D_o u_o &= iAe^{iT_o} - i\overline{A}e^{-iT_o} \\ D_o D_1 u_o &= iA'e^{iT_o} - i\overline{A}'e^{-iT_o} \\ u_o^2 D_o u_o &= iA^3 e^{3iT_o} - iA^2 \overline{A}e^{iT_o} + iA\overline{A}^2 e^{iT_o} - i\overline{A}^3 e^{-3iT_o} + 2iA^2 \overline{A}e^{iT_o} - 2iA\overline{A}^2 e^{-iT_o} \\ A' &= \frac{dA}{dT_1} \end{aligned}$$

η εξίσωση (2.2.7) γράφεται στη μορφή :

$$D_o^2 u_1 + u_1 = ia^2 A^3 e^{3iT_o} + [-2iA' + ia^2 A - ia^2 A^2 \overline{A}]e^{iT_o} + cct \quad (2.2.9)$$

Η (2.2.9) είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως, μη ομογενής με σταθερούς συντελεστές. Η λύση της αντίστοιχης ομογενούς:

$$D_o^2 u_1 + u_1 = 0$$

περιλαμβάνει τον όρο $e^{i\omega_0 t}$, πολλαπλασιασμένο με κάποιο συντελεστή. Συνεπώς ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους της (2.2.9) συντονίζεται με τη λύση της ομογενούς, με συνέπεια την ύπαρξη μη φραγμένης λύσης της (2.2.9). Δεδομένου της περιοδικότητας του φαινομένου (αλλά και από το γεγονός ότι ένα μη γραμμικό σύστημα δεν έχει απειριζόμενες λύσεις (οι μη γραμμικοί όροι δρουν με τη μορφή απόσβεσης) μηδενίζουμε τον όρο αυτό, ο οποίος καλείται "αιώνιος" (secular term), απαιτώντας ο συντελεστής του $e^{i\omega_0 t}$ στην (2.2.9) να είναι μηδέν. Δηλαδή:

$$-2i \frac{dA}{dT_1} + ia^2 A - iaA^2 \bar{A} = 0, \quad A = A(T_1)$$

(2.2.10)

Η (2.2.10) είναι μια διαφορική εξίσωση ως προς το πλάτος $A=A(T_1)$ με μεταβλητή τον αργό χρόνο T_1 . Η (2.2.10) καλείται εξίσωση διαμόρφωσης πλάτους. Καταλήγουμε δηλαδή στο εξής συμπέρασμα: Η αργή δυναμική διαμορφώνει το φαινόμενο της ταλάντωσης (και από μαθηματικής άποψης!).

Σημειώνουμε επίσης ότι η αξία της εξίσωσης (2.2.7) είναι η εξαγωγή της εξίσωσης διαμόρφωσης (2.2.10) και όχι τελικά η λύση της. Για τη λύση της (2.2.10) εργαζόμαστε ως εξής: Αναζητούμε λύση της μορφή:

$$A(T_1) = \frac{1}{2} \cdot a(T_1) \cdot e^{ib(T_1)}$$

(2.2.11)

όπου $a(T_1)$, $b(T_1)$: πραγματικές συναρτήσεις: $a(T_1) > 0$ (πλάτος), $b(T_1)$: φάση. Με τη χρήση των σχέσεων

$$A(T_1) = \frac{1}{2} a \cdot e^{ib}, \quad A^2 = \frac{1}{4} a^2 \cdot e^{2ib}, \quad \frac{dA}{dT_1} = \frac{1}{2} (a' + iab') \cdot e^{ib}$$

και με αντικατάσταση στη (2.2.10) προκύπτει ότι

$$a' + iab' - \frac{1}{2} a^2 a + \frac{1}{8} a^2 a^3 = 0$$

Χωρίζοντας τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη καταλήγουμε στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

$$a' - \frac{1}{2}\alpha^2 a + \frac{1}{8}\alpha^2 a^3 = 0$$

(2.2.12)

$$a b' = 0$$

(2.2.13)

με το οποίο είναι ισοδύναμο η διαφορική εξίσωση (2.2.10). Δεδομένου ότι $a(T_1) > 0$ (δηλαδή $a \neq 0$) από τη (2.2.13) έπεται άμεσα ότι

$$b(T_1) = b_0$$

(2.2.14)

Από τη (2.2.12) ισοδύναμα προκύπτει

$$8 \int \frac{da}{a(2-a)(2+a)} = aT_1 + c$$

όπου c σταθερά. Από την ανάλυση σε απλά κλάσματα

$$\frac{8}{a(2-a)(2+a)} = \frac{2}{a} + \frac{1}{2-a} - \frac{1}{2+a}$$

έπεται τελικά ότι

$$\ln \left| \frac{a^2}{4-a^2} \right| = a^2 T_1 + c \quad \eta \quad a^2 = \frac{4}{1 + k \cdot e^{-a^2 T_1}}$$

όπου $k = e^{-c} > 0$, σταθερά, εξαρτώμενη από τις αρχικές συνθήκες. Τελικά

$$a(T_1) = \frac{2}{\sqrt{1 + k e^{-a^2 T_1}}}$$

(2.2.15)

Η (2.2.11) λόγω των (2.2.14) και (2.2.15) γίνεται:

$$A(T_1) = \frac{1}{\sqrt{1 + ke^{-a^2 T_1}}} \cdot e^{b_0} \quad (2.2.16)$$

Τότε η λύση (2.2.3) λόγω των (2.2.8) και (2.2.16) γράφεται:

$$\begin{aligned} u(T_0, T_1) &= \frac{e^{ib_0}}{\sqrt{1 + ke^{-a^2 T_1}}} \cdot e^{iT_0} + \frac{e^{-ib_0}}{\sqrt{1 + ke^{-a^2 T_1}}} \cdot e^{-iT_0} + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + O(\varepsilon^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + ke^{-a^2 T_1}}} [e^{i(T_0 + b_0)} + e^{-i(T_0 + b_0)}] + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

και λόγω της ταυτότητας

$$2 \cos(T_0 + b_0) = e^{i(T_0 + b_0)} + e^{-i(T_0 + b_0)}$$

έχουμε ότι

$$u(T_0, T_1) = \frac{2}{\sqrt{1 + ke^{-\varepsilon a^2 T_1}}} \cdot \cos(T_0 + b_0) + O(\varepsilon)$$

Τέλος λόγω των σχέσεων (2.2.2) έπεται ότι

$$u(\tau) = \frac{2}{\sqrt{1 + ke^{-\mu \tau}}} \cdot \cos(\tau + b) + O(\varepsilon) \quad (2.2.17)$$

Εξετάζουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης (2.2.17). Με την πάροδο μεγάλου χρονικού διαστήματος έχουμε:

$$u_\infty = \lim_{\tau \rightarrow \infty} u(\tau) = 2 \cos(\tau + b) + O(\varepsilon) \quad (2.2.18)$$

δηλαδή

$$A_{\infty} = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} A(T_1) = 2$$

Αυτό σημαίνει πως η λύση πλησιάζει τον οριακό κύκλο ακτίνας $2 + O(\varepsilon)$. Η μορφή (2.2.18) ονομάζεται λύση στη μόνιμη κατάσταση (steady state condition). Η λύση στη μόνιμη κατάσταση μπορεί να εξαχθεί κι ως εξής: Επανερχόμαστε στο σύστημα των (2.2.12) και (2.2.13), το οποίο είναι ισοδύναμο με την εξίσωση διαμόρφωσης (10). Στη μόνιμη κατάσταση τα μεγέθη a και b δεν μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου, συνεπώς:

$$\frac{da}{dT_1} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{db}{dT_1} = 0$$

(2.2.20)

Τότε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (2.2.12) και (2.2.13) βάσει των (2.2.20) μετατρέπεται στο αλγεβρικό σύστημα

$$-\frac{1}{2}a^2a + \frac{1}{8}a^2a^3 = 0, \quad b = b_0$$

και ισοδύναμα

$$a(4 - a^2) = 0 \quad \text{ή} \quad a(2-a)(2+a) = 0$$

καθώς και

$$b = b_0.$$

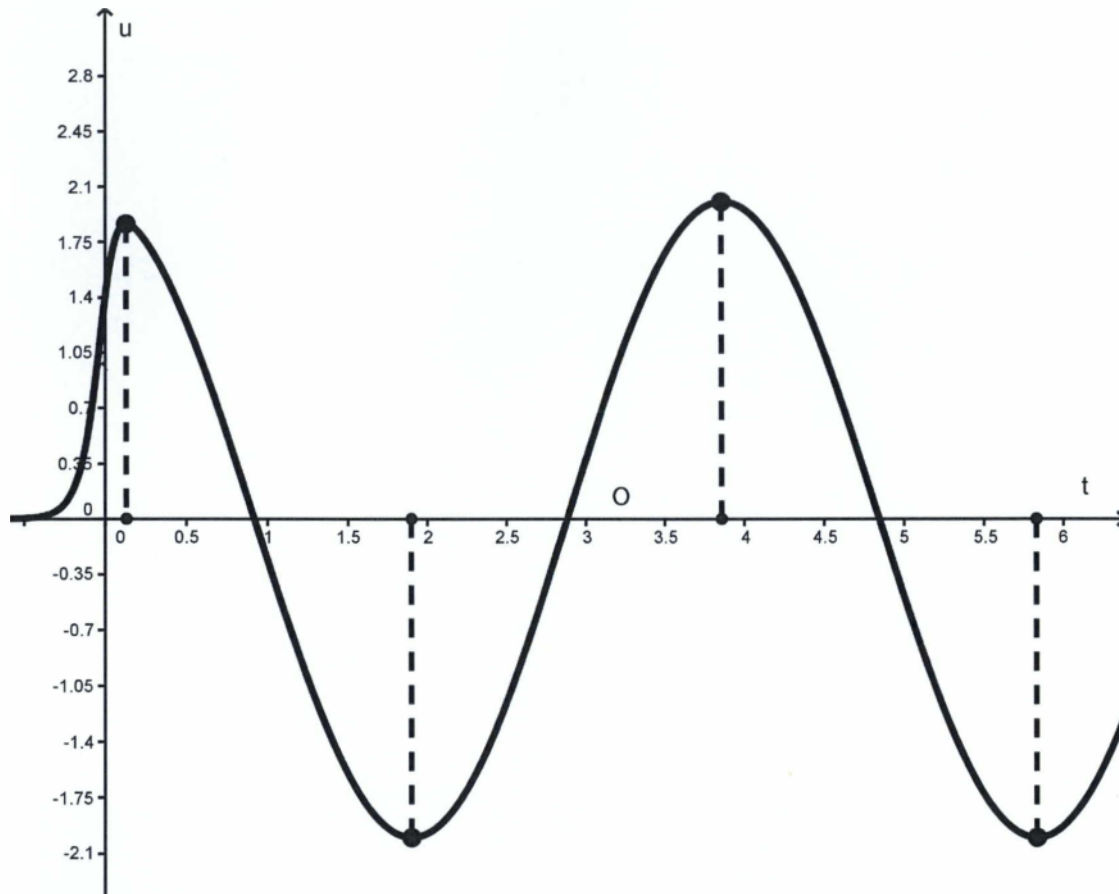
Δεδομένου ότι $a(T_1) > 0$ έπεται τελικά ότι

$$a_{\infty} = 2 \quad \text{και} \quad b_{\infty} = b_0$$

επομένως

$$A_{\infty} = e^{ib_0}$$

απ' όπου προκύπτει η λύση (2.2.18) στη μόνιμη κατάσταση.



Σχήμα 2.2.1 Γραφική παράσταση της λύσης με ακρίβεια ϵ . Το πλάτος σταθεροποιείται κοντά στην τιμή $u=2$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

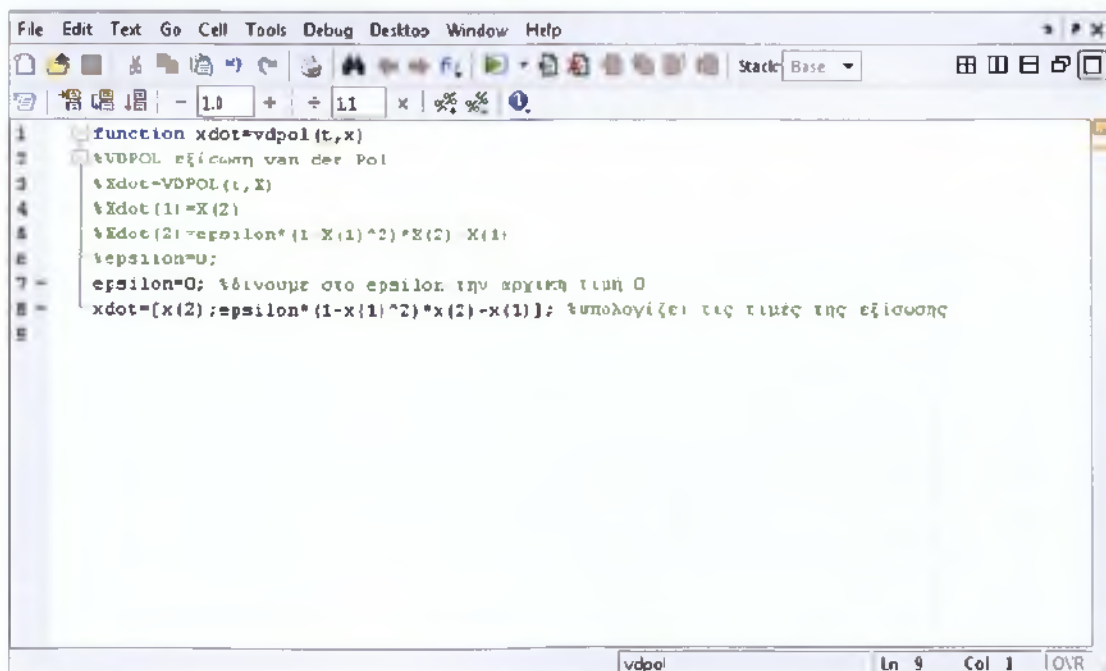
Η ΕΞΙΣΩΣΗ VAN DER POL ΣΤΟ MATLAB

3.1 ΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Η εξίσωση van der Pol μπορεί να επιλυθεί από το MATLAB με τον εξής τρόπο:

1. Πρέπει να γίνει κωδικοποίηση της εξίσωσης Van der Pol σε ένα αρχείο M της μορφής `ydot = odefile(t,x)`. Δηλαδή το αρχείο θα δέχεται ένα χρόνο t και μια λύση x , και θα επιστρέφει τις τιμές για τις παραγώγους.
2. Το αρχείο M για την εξίσωση Van der Pol, είναι το παρακάτω:

```
function xdot=vdpol(t,x)
%VDPOL εξίσωση van der Pol.
%Xdot=VDPOL(t,X)
%Xdot(1)=X(2)
%Xdot(2)=epsilon*(1-X(1)^2)*X(2)-X(1)
%epsilon=0;
epsilon=0; %δίν
ουμε στο epsilon την αρχική τιμή 0
xdot=[x(2);epsilon*(1-x(1)^2)*x(2)-x(1)]; %υπολογίζει τις τιμές της
εξίσωσης
```



```
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
Stack: Base
function xdot=vdpol(t,x)
%VDPOL εξίσωση van der Pol
%Xdot=VDPOL(t,X)
%Xdot(1)=X(2)
%Xdot(2)=epsilon*(1-X(1)^2)*X(2)-X(1)
%epsilon=0;
epsilon=0; %δίνουμε στο epsilon την αρχική τιμή 0
xdot=[x(2);epsilon*(1-x(1)^2)*x(2)-x(1)]; %υπολογίζει τις τιμές της εξίσωσης
```

Εικόνα 3.1.1 Το παράθυρο εντολών του MATLAB για το αρχείο m.

3. Τα ορίσματα εισόδου είναι t και x .
4. Η έξοδος $xdot$ είναι διάνυσμα στήλης.
5. Με βάση το παραπάνω αρχείο ODE η εξίσωση van der Pol λύνεται με τις παρακάτω εντολές που γράφονται στο παράθυρο εντολών του MATLAB:

```
>> tspan=[0 20]; %διάστημα χρόνου για την ολοκλήρωση
>> xo=[2;0]; %αρχικές συνθήκες [είναι σε στήλη]
>> [t,x]=ode45(@vdpol,tspan,xo);
>> size(t) %αριθμός βημάτων
```

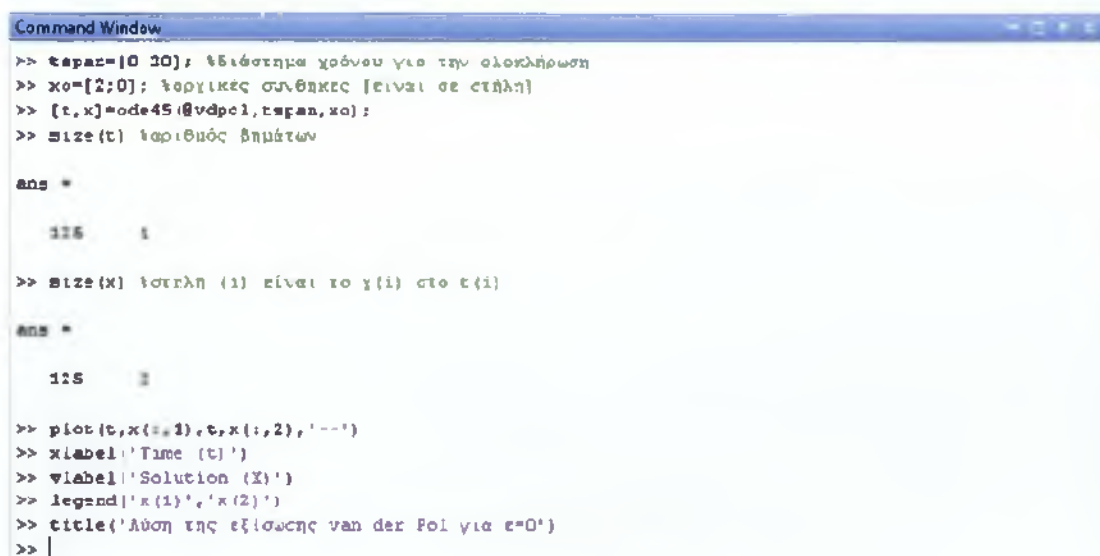
ans =

125 1

```
>> size(x) %στήλη (i)είναι το x(i) στο t(i)
```

ans =

125 2



```
Command Window
>> tspan=[0 20]; %διάστημα χρόνου για την ολοκλήρωση
>> xo=[2;0]; %αρχικές συνθήκες [είναι σε στήλη]
>> [t,x]=ode45(@vdpol,tspan,xo);
>> size(t) %αριθμός βημάτων

ans =

    125     1

>> size(x) %στήλη (i) είναι το x(i) στο t(i)

ans =

    125     2

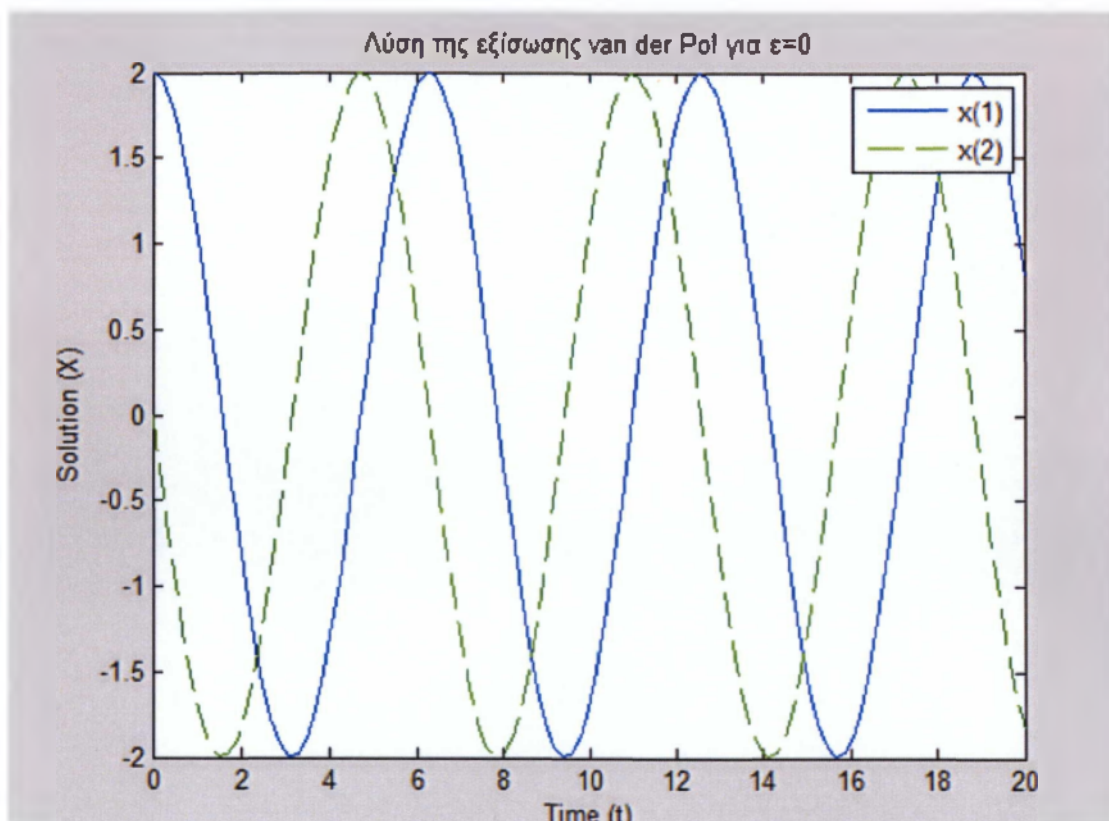
>> plot(t,x(:,1),t,x(:,2),'--')
>> xlabel('Time (t)')
>> ylabel('Solution (X)')
>> legend('x(1)','x(2)')
>> title('Λύση της εξίσωσης van der Pol για e=0')
>> |
```

Εικόνα 3.1.2 Το παράθυρο εντολών του MATLAB με τις εντολές της εξίσωσης

Van der Pol, μαζί με τις εντολές για τη σχεδίαση κυματομορφής.

6. Για να πάρουμε τη γραφική παράσταση της εξίσωσης Van der Pol, εισάγουμε στο παράθυρο των εντολών τα παρακάτω:

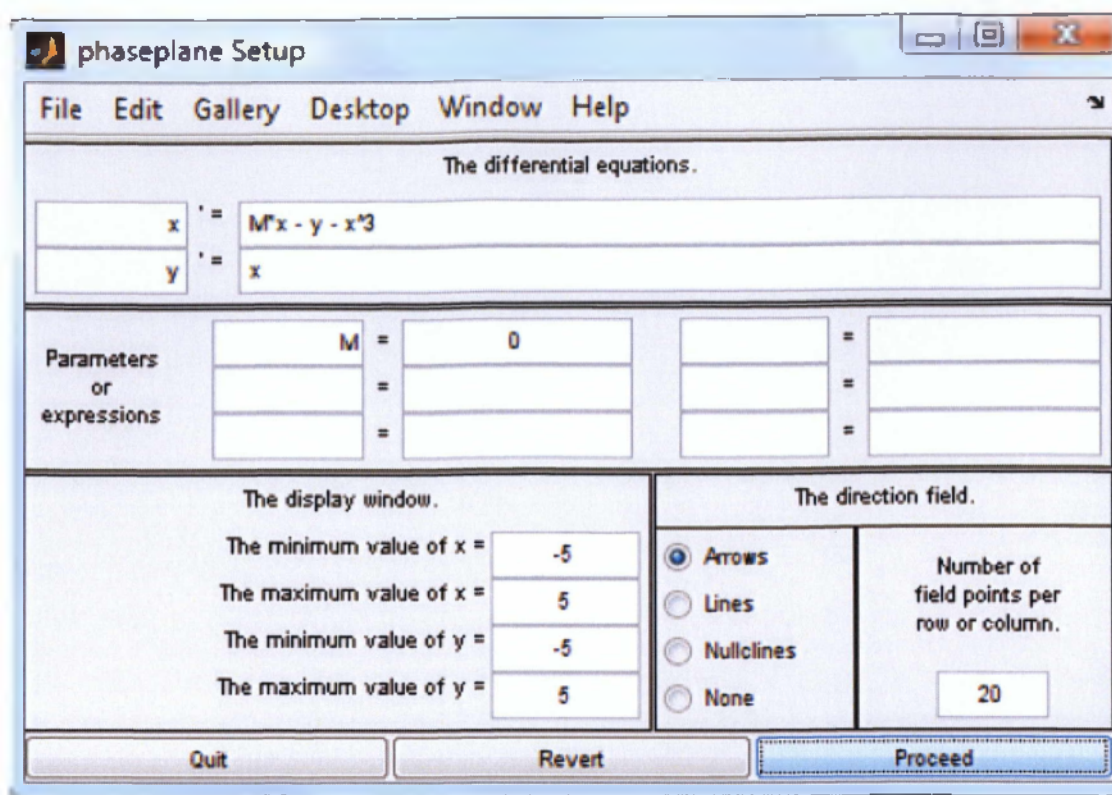
```
>> plot(t,x(:,1),t,x(:,2),'--')
>> xlabel('χρόνος t')
>> xlabel('Time (t)')
>> ylabel('Solution (X)')
>> legend('x(1)','x(2)')
>> title('Λύση της εξίσωσης van der Pol για ε=0')
```



Διάγραμμα 3.1.1 Η κυματομορφή της εξίσωσης Van der Pol για $\epsilon=0$

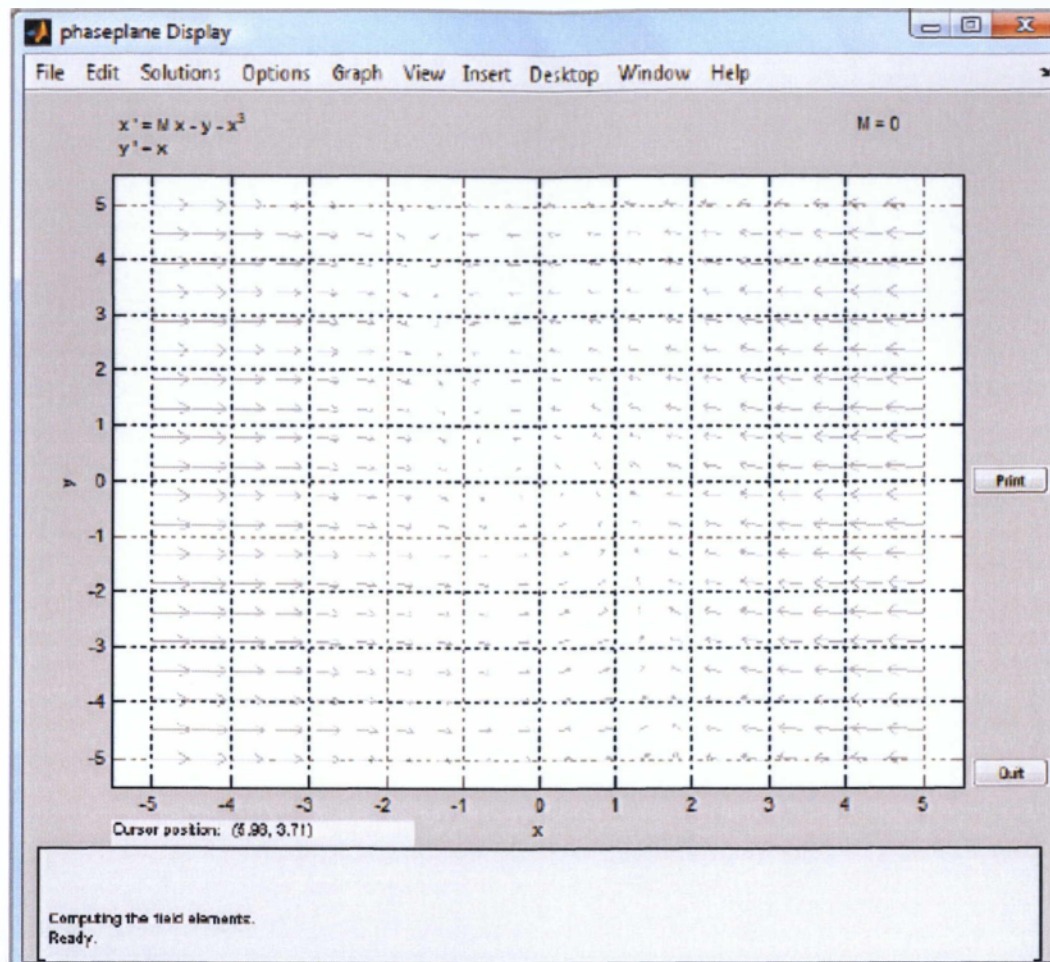
7. Για το σχεδιασμό επιπέδων φάσεων (phase planes), χρησιμοποιήθηκε το Java Applet phase plane, που βασίστηκε στο rplane 2005.10 J. Polking [40]. Στο επίπεδο φάσεων έγινε επεξεργασία στο κώδικα με σκοπό να αποδώσει τα αποτελέσματα των επιπέδων φάσης (phase plan)

Το αρχικό παράθυρο του phase plane είναι το παρακάτω:



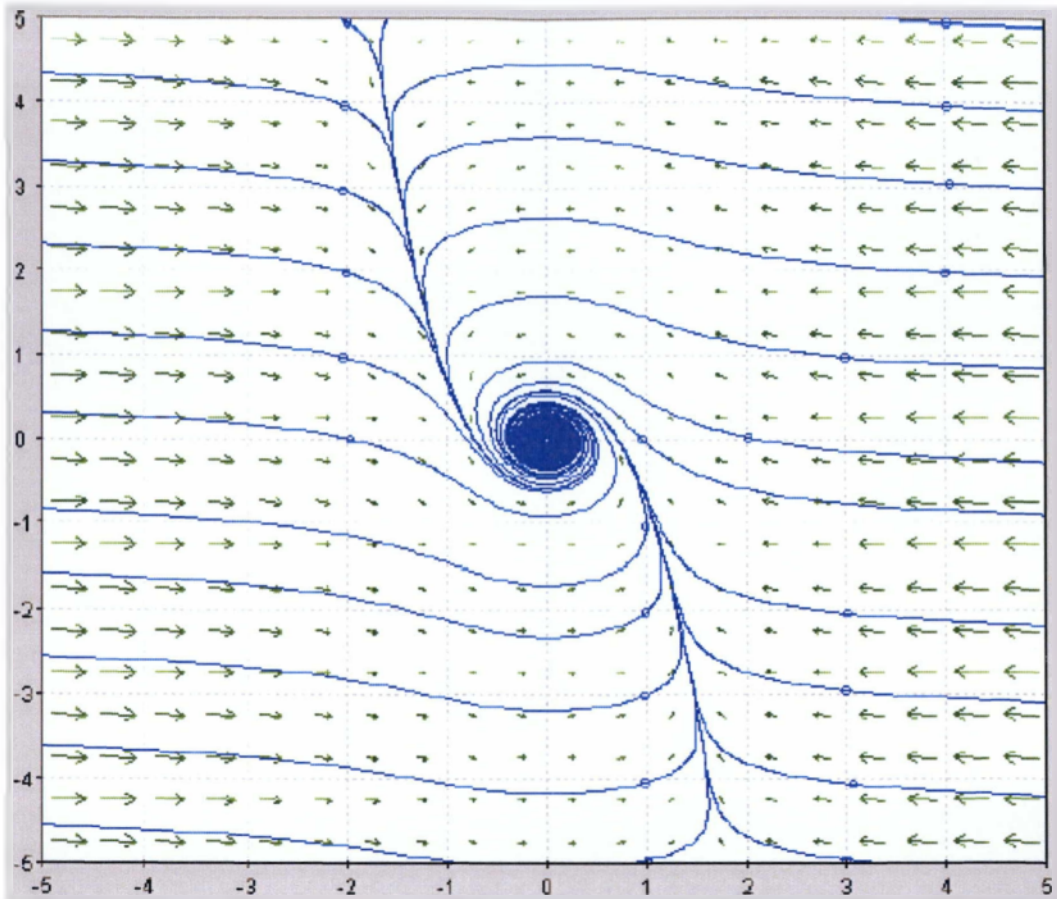
Εικόνα 3.1.3 Το interface του phase plane, στο οποίο γίνεται η εισαγωγή δεδομένων.

Το επίπεδο φάσεων σαν προεπιλογή μπορεί να επιλύσει την εξίσωση Van der Pol. Αυτό όμως δεν είναι απαγορευτικό. Μπορεί να επιλύσει και άλλες εξισώσεις, αφού βέβαια εισαχθούν στον κώδικα της εφαρμογής. Η παράμετρος που μας ενδιαφέρει για τη σχεδίαση των επιπέδων φάσης είναι η χαρακτηριστική παράμετρος ϵ . Δίνοντας λοιπόν μια τιμή στην ϵ (όπου στον κώδικα είναι η M), ανοίγει το παράθυρο σχεδίασης των επιπέδων.



Εικόνα 3.1.4 Το παράθυρο σχεδιασμού του επιπέδου φάσεων

Η διαδικασία σχεδίασης είναι πολύ απλή, επιλέγουμε ένα σημείο με τον κέρσορα και το ενεργοποιούμε έτσι σχεδιάζουμε το διάγραμμα φάσης με βάση το σημείο που επιλέχθηκε.



Διάγραμμα 3.1.2 Επιπέδου φάσης της εξίσωσης μας για $\epsilon=0$

Με την ίδια σύνταξη του προγράμματος *m* και αλλάζοντας τις τιμές του ϵ και κάνοντας ακόμη χρήση των ίδιων εντολών παίρνουμε την κυματομορφή της εξίσωσης μας. Για να έχουμε το επίπεδο φάσης (phase plane) χρησιμοποιούμε το `phaseplane` και αλλάζουμε την τιμή του ϵ .

Στη συνέχεια υπάρχουν τα αρχεία *m*, οι εντολές, οι κυματομορφές και τα επίπεδα φάσεων για $\epsilon=0,5$, $\epsilon=1$ και $\epsilon=5$.

* $\epsilon = 0.5$

Αρχείο *m*

```
function xdot=vdpol(t,x)
```

```
%VDPOL εξίσωση van der Pol.
```

```
%Xdot=VDPOL(t,X)
```

```
%Xdot(1)=X(2)
```

```
%Xdot(2)=epsilon*(1-X(1)^2)*X(2)-X(1)
```

```
%epsilon=0.5;
```

```
epsilon=0.5; %δίνουμε στο epsilon την αρχική τιμή 0.5
```

```
xdot=[x(2);epsilon*(1-x(1)^2)*x(2)-x(1)]; %υπολογίζουμε τις τιμές της εξίσωσης
```

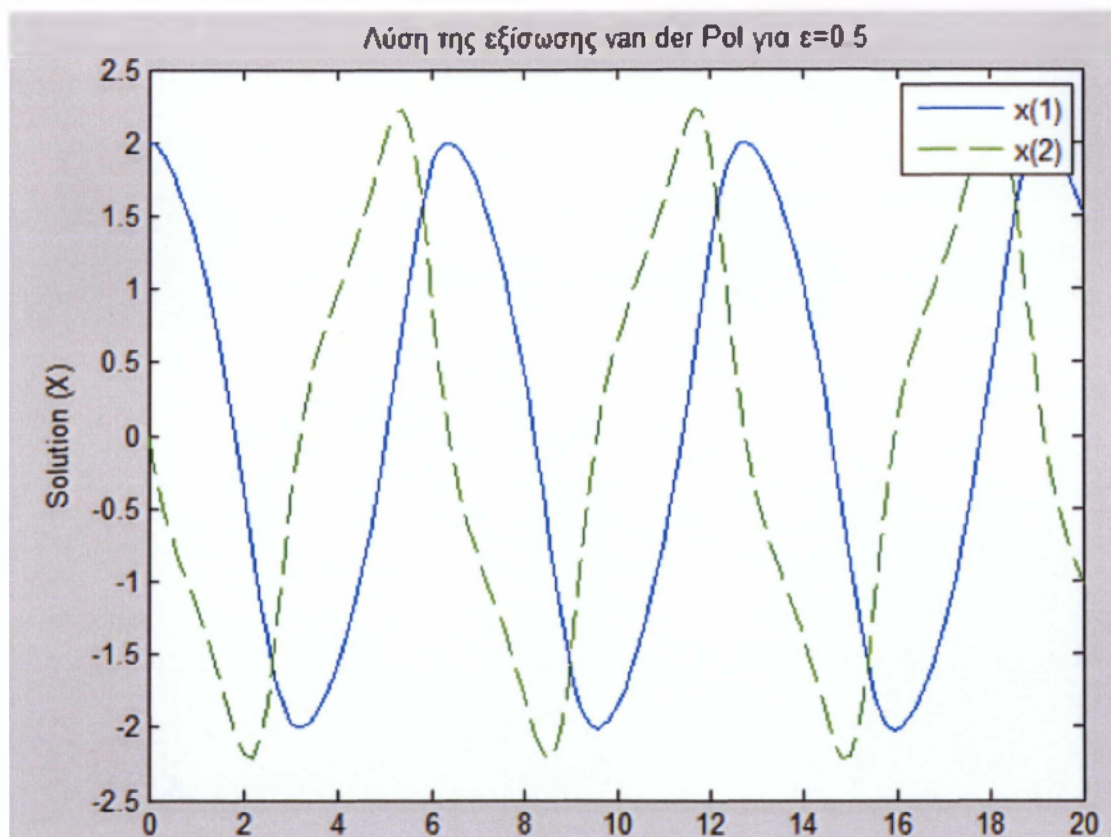
Παράθυρο εντολών

```
>> tspan=[0 20];  
>> xo=[2;0];  
>> [t,x]=ode45(@vdpol,tspan,xo);  
>> size(t)
```

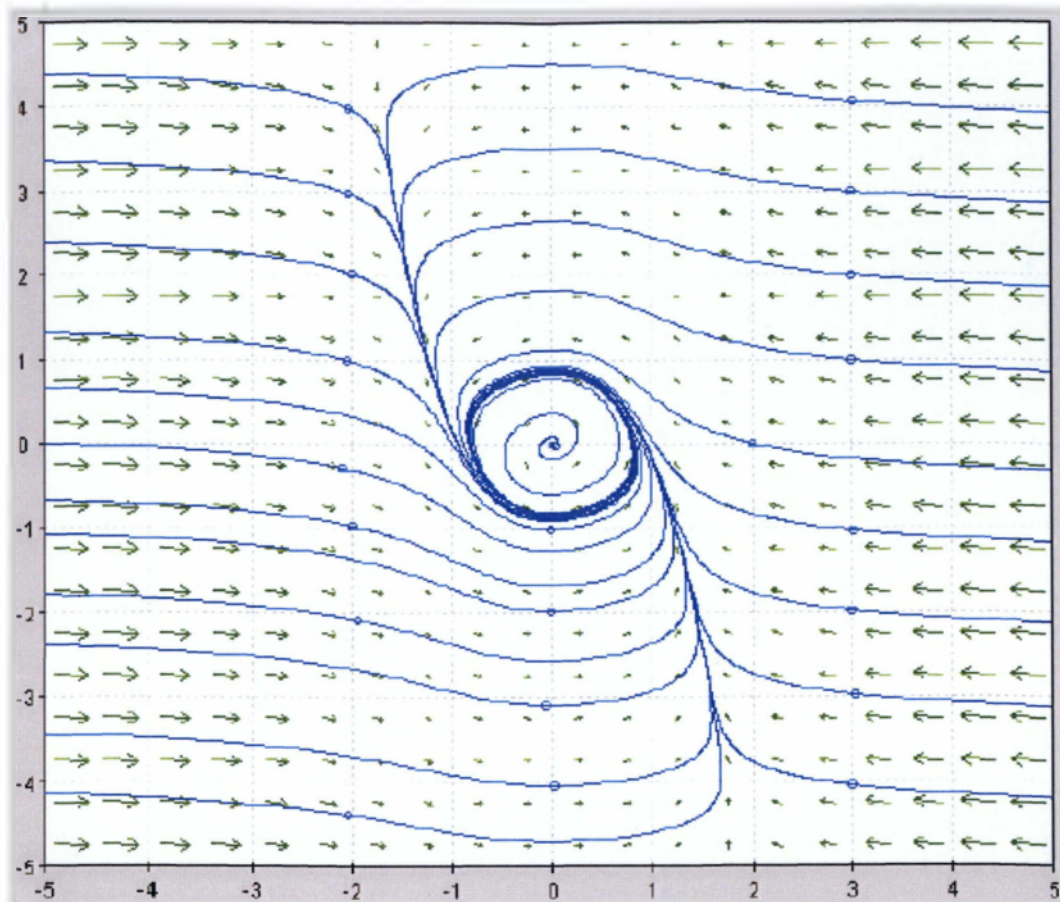
```
ans =  
157 1  
>> size(x)  
ans =
```

```
157 2
```

```
>> plot(t,x(:,1),t,x(:,2),'--')  
>> xlabel('Time (t)')  
>> ylabel('Solution (X)')  
>> legend('x(1)', 'x(2)')  
>> title(' Λύση της εξίσωσης van der Pol για ε=0.5')  
>>
```



Διάγραμμα 3.1.3 Η κυματομορφή της εξίσωσης Van der Pol για $\epsilon=0,5$



Διάγραμμα 3.1.4 Διάγραμμα επιπέδου φάσης της εξίσωσης μας για $\epsilon=0,5$

$\epsilon = 1$

Αρχείο m

function xdot=vdpol(t,x)

%VDPOL εξίσωση van der Pol.

%Xdot=VDPOL(t,X)

%Xdot(1)=X(2)

%Xdot(2)=epsilon*(1-X(1)^2)*X(2)-X(1)

%epsilon=0;

epsilon=1; % δίνουμε στο epsilon την αρχική τιμή 1

xdot=[x(2);epsilon*(1-x(1)^2)*x(2)-x(1)]; % υπολογίζουμε τις τιμές της εξίσωσης

Παράθυρο εντολών

>> tspan=[0 20];

>> xo=[2;0];

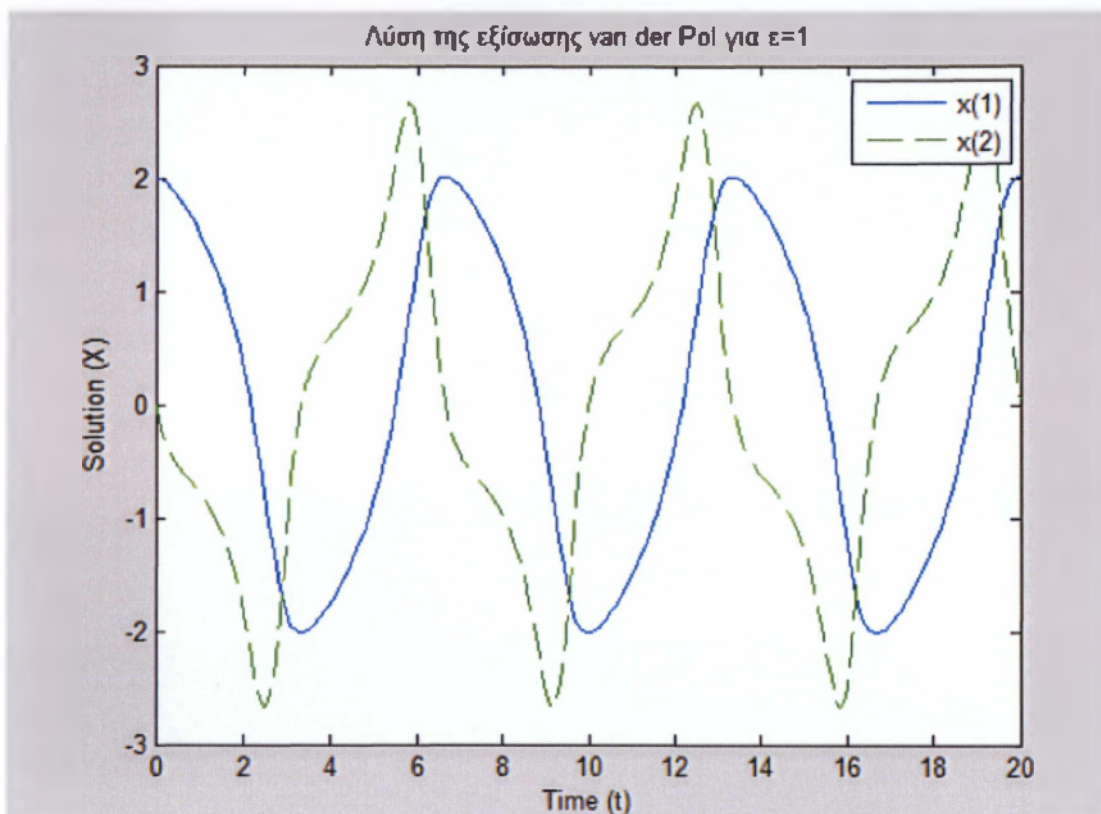
>> [t,x]=ode45(@vdpol,tspan,xo);

>> size(t)

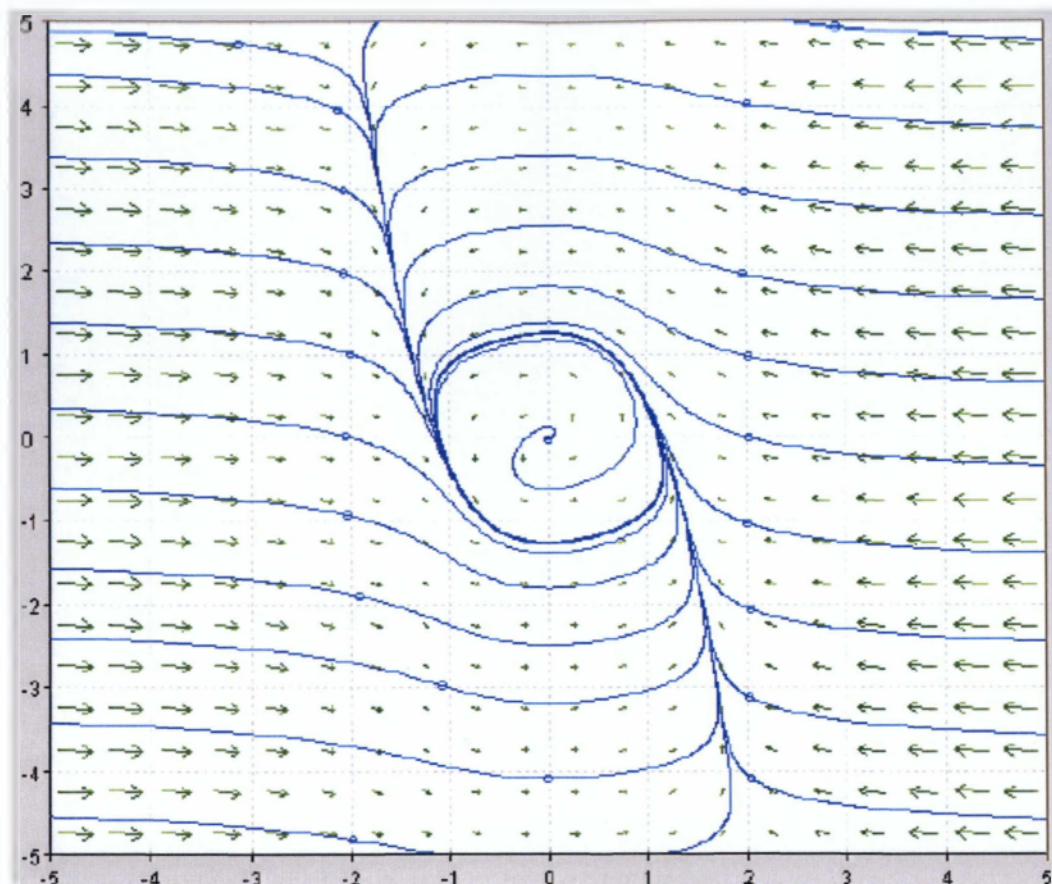
ans =

237 1

```
>> size(x)
ans =
237 2
>> plot(t,x(:,1),t,x(:,2),'--')
>> xlabel('Time (t)')
>> ylabel('Solution (X)')
>> legend('x(1)', 'x(2)')
>> title('Λύση της εξίσωσης van der Pol για ε=1')
```



Διάγραμμα 3.1.5 Η κυματομορφή της εξίσωσης Van der Pol για $\epsilon=1$



Διάγραμμα 3.1.6 Επίπεδο φάσης της εξίσωσης Van der Pol μας για $\epsilon=1$

$\epsilon=5$

Αρχείο m

```
function xdot=vdpol(t,x)
```

```
%VDPOL εξίσωσηvan der Pol.
```

```
%Xdots=VDPOL(t,X)
```

```
%Xdots(1)=X(2)
```

```
%Xdots(2)=epsilon*(1-X(1)^2)*X(2)-X(1)
```

```
%epsilon=5;
```

```
epsilon=5; % δίνουμε στο epsilon την αρχική τιμή 5
```

```
xdots=[x(2);epsilon*(1-x(1)^2)*x(2)-x(1)]; % υπολογίζουμε τις τιμές της εξίσωσης
```

Παράθυρο εντολών

```
>> tspan=[0 50];
```

```
>> xo=[2;0];
```

```
>> [t,x]=ode45(@vdpol,tspan,xo);
```

```
>> size(t)
```

```
ans =
```

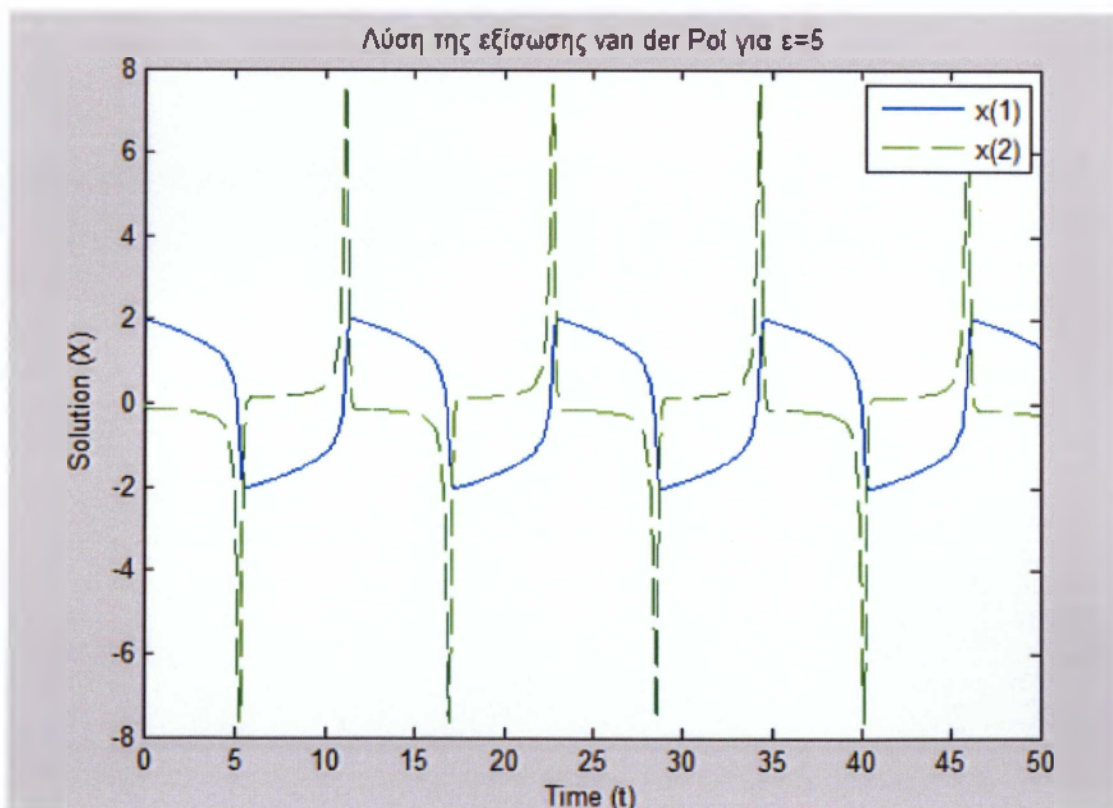
```
1057 1
```

```
>> size(x)
```

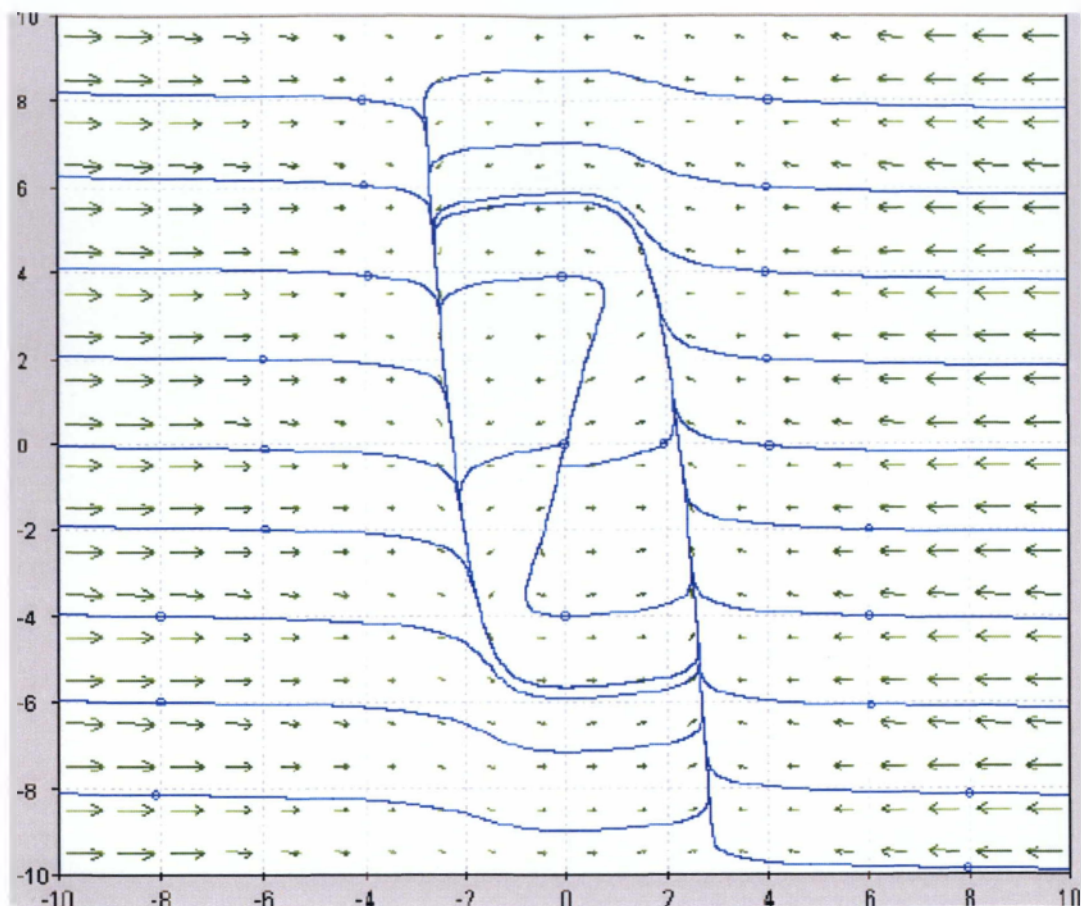
```
ans =
```

```
1057 2
```

```
>> plot(t,x(:,1),t,x(:,2),'--')  
>> xlabel('Time (t)')  
>> ylabel('Solution (X)')  
>> legend('x(1)', 'x(2)')  
>> title('Λύση της εξίσωσης van der Pol για ε=5')
```



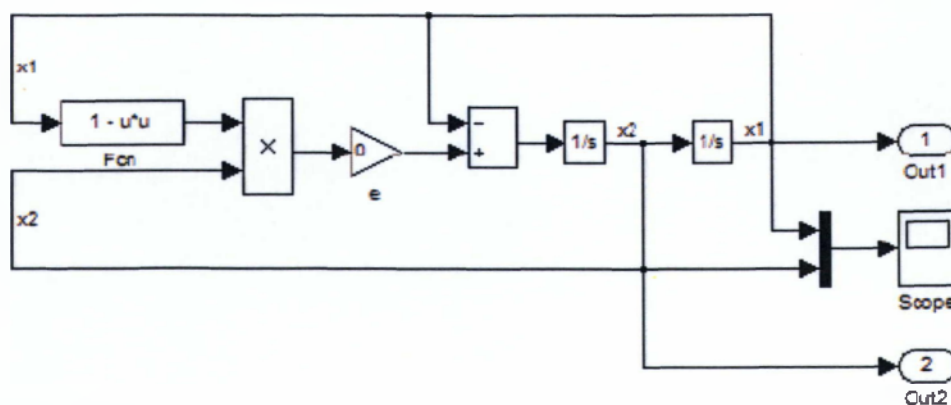
Διάγραμμα 3.1.7 Η κυματομορφή της εξίσωσης Van der Pol για ε=5



Διάγραμμα 3.1.8. Επίπεδο φάσης της εξίσωσης Van der Pol για $\epsilon=5$

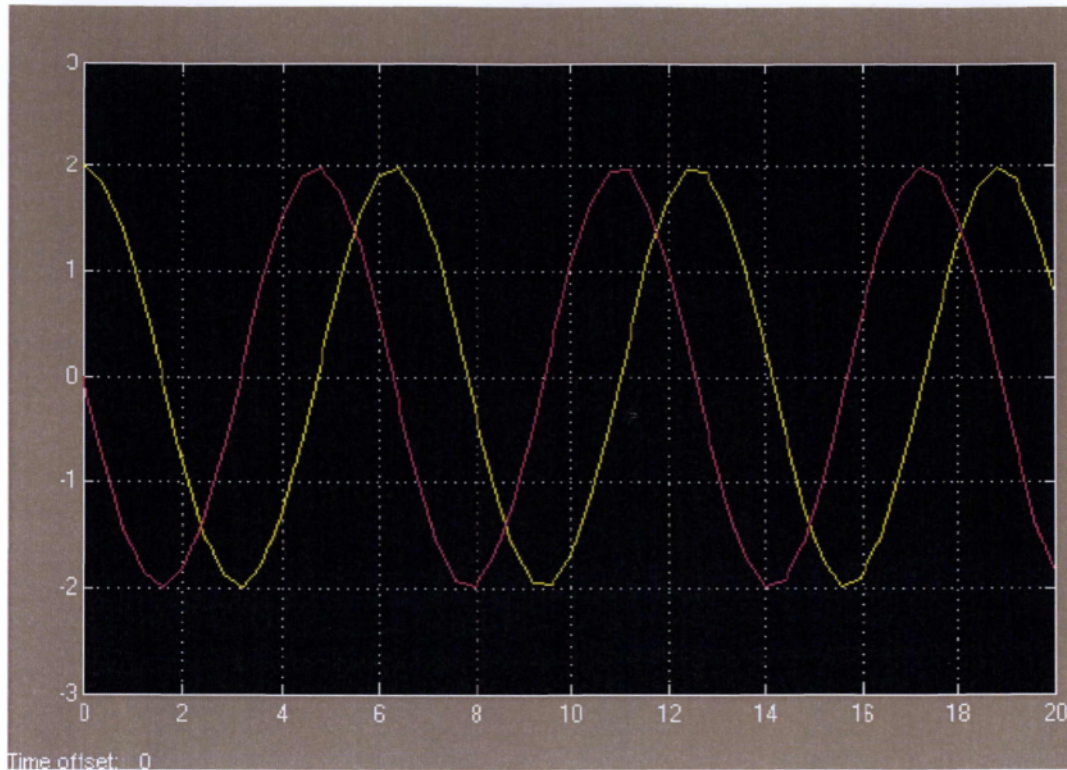
3.2 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΕ ΠΡΟΣΘΗΚΗ ΘΟΡΥΒΟΥ

Σε αυτή την ενότητα θα προσπαθήσουμε να διερευνήσουμε την εξίσωση van der Pol με την προσθήκη θορύβου.



Σχήμα 3.2.1 Κατασκευή του block διαγράμματος της εξίσωσης van der Pol, από το Simulink

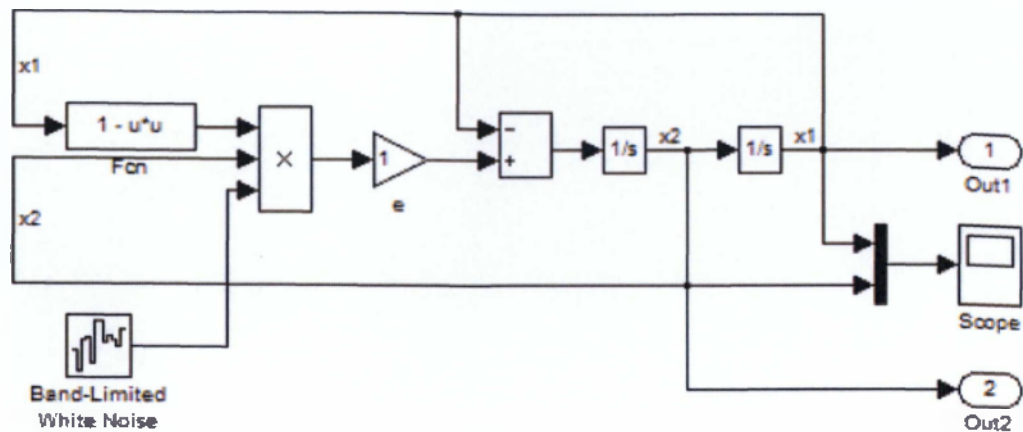
Για $\varepsilon=0$ έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα σε score με την επίλυση της εξίσωσης Van der Pol όπως στην προηγούμενη παράγραφο 3.1



Διάγραμμα 3.1. Η κυματομορφή της εξίσωσης Van der Pol για $\varepsilon=0$, στο SIMULINK

3.2.1 Λευκός θόρυβος (White Noise)

Για $\varepsilon=1$ και με προσθήκη του block "Band-Limited White Noise" δεν υπάρχει καμία μεταβολή στο "Noise Power = [0.1]".



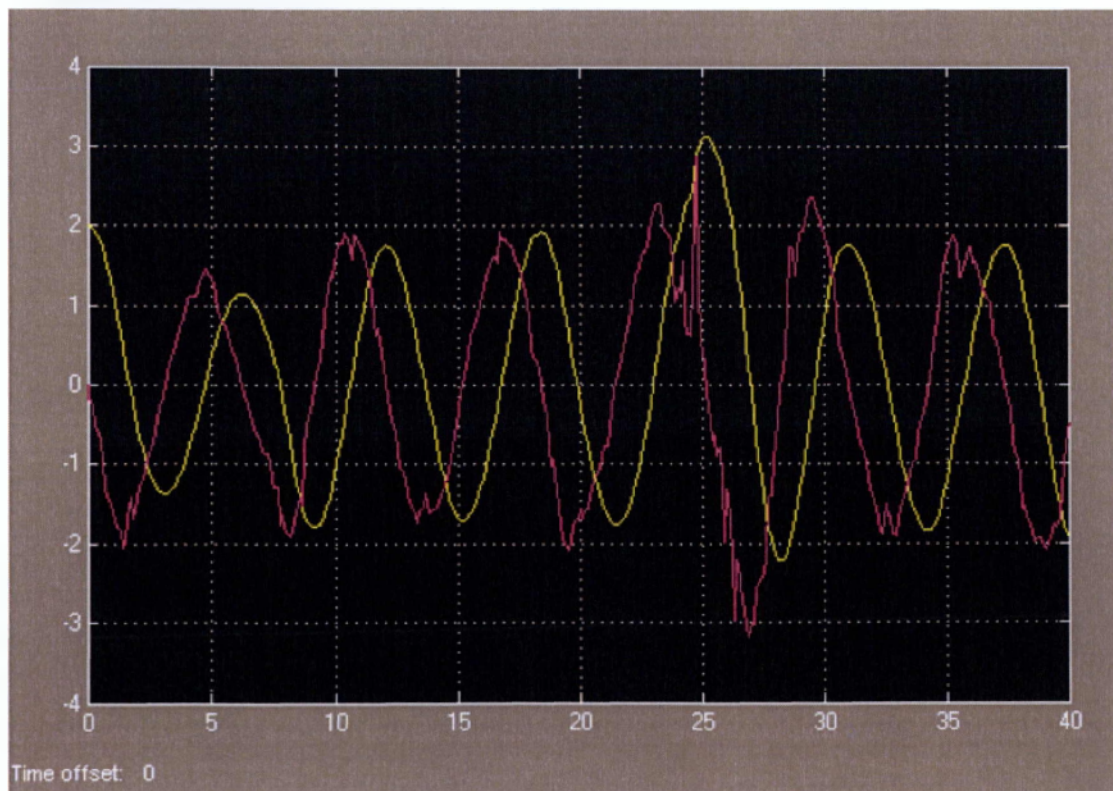
Σχήμα 3.2.1.1 Το block διάγραμμα της εξίσωσης van der Pol με την προσθήκη “Band-Limited White Noise” που πραγματοποιήθηκε στο περιβάλλον του SIMULINK.

Οι τιμές που χρησιμοποιήσαμε είναι:

$$\varepsilon = 1$$

$$\text{Noise Power} = 0.1$$

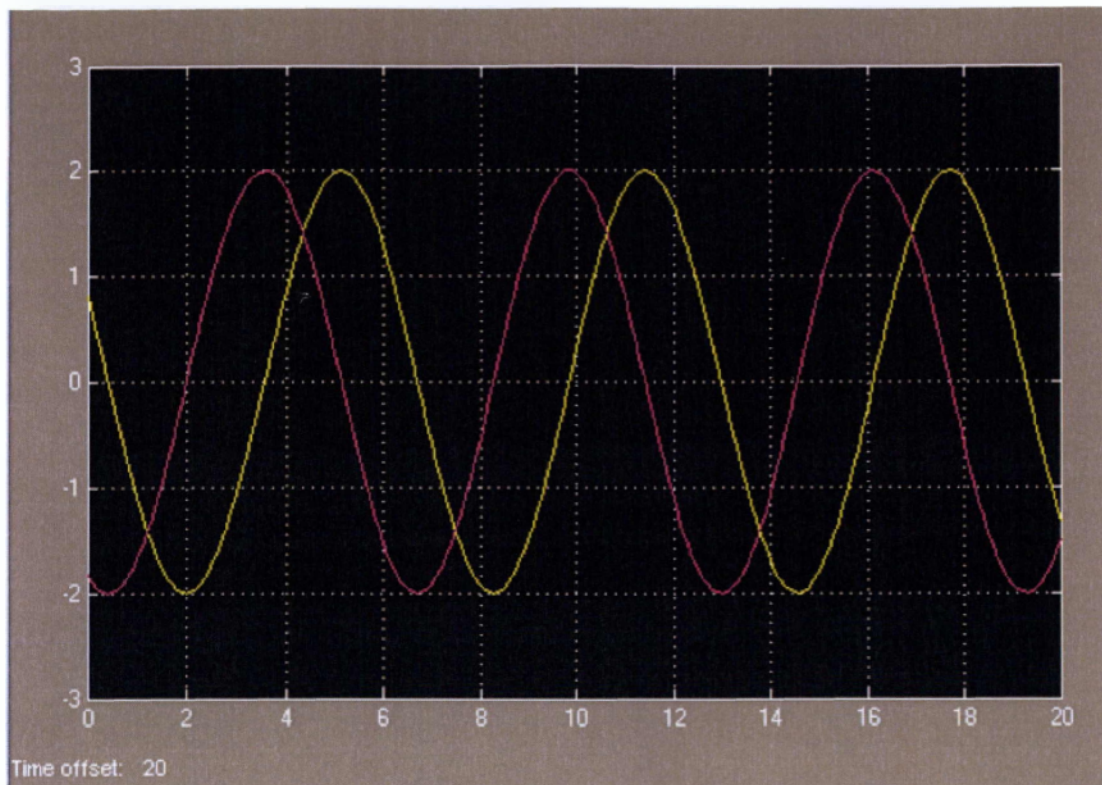
$$\text{Sample time} = 0.1$$



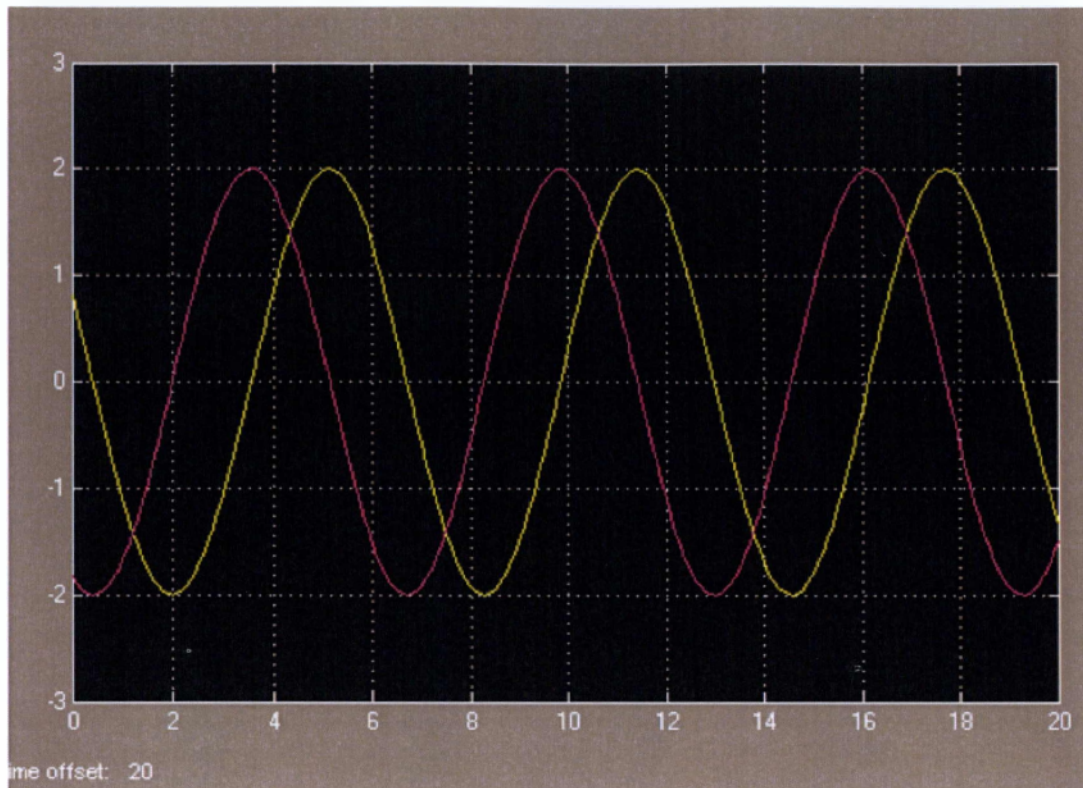
Διάγραμμα 3.2.1.1 Κυματομορφή για $\varepsilon = 1$, Noise Power = 0.1, και

Sample time= 0.1

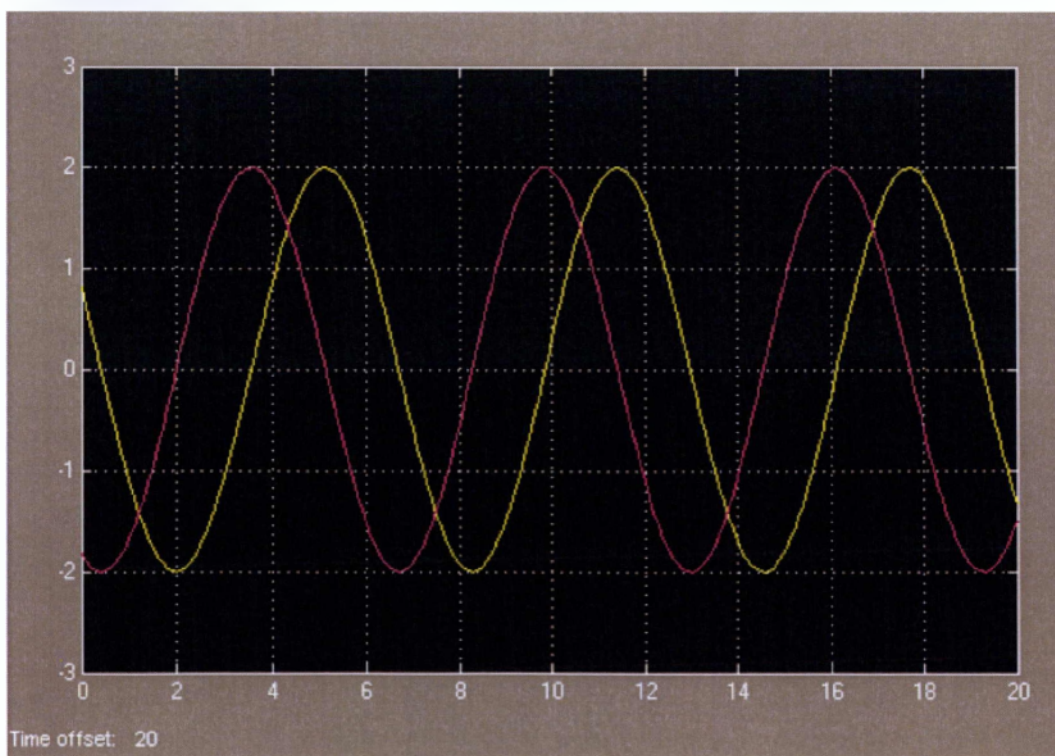
Στη συνέχεια με $\epsilon=0,1,5$ και αμετάβλητο το Sample time = 0.1 αλλά μεταβάλλοντας το Noise Power, έχουμε τις παρακάτω κυματομορφές



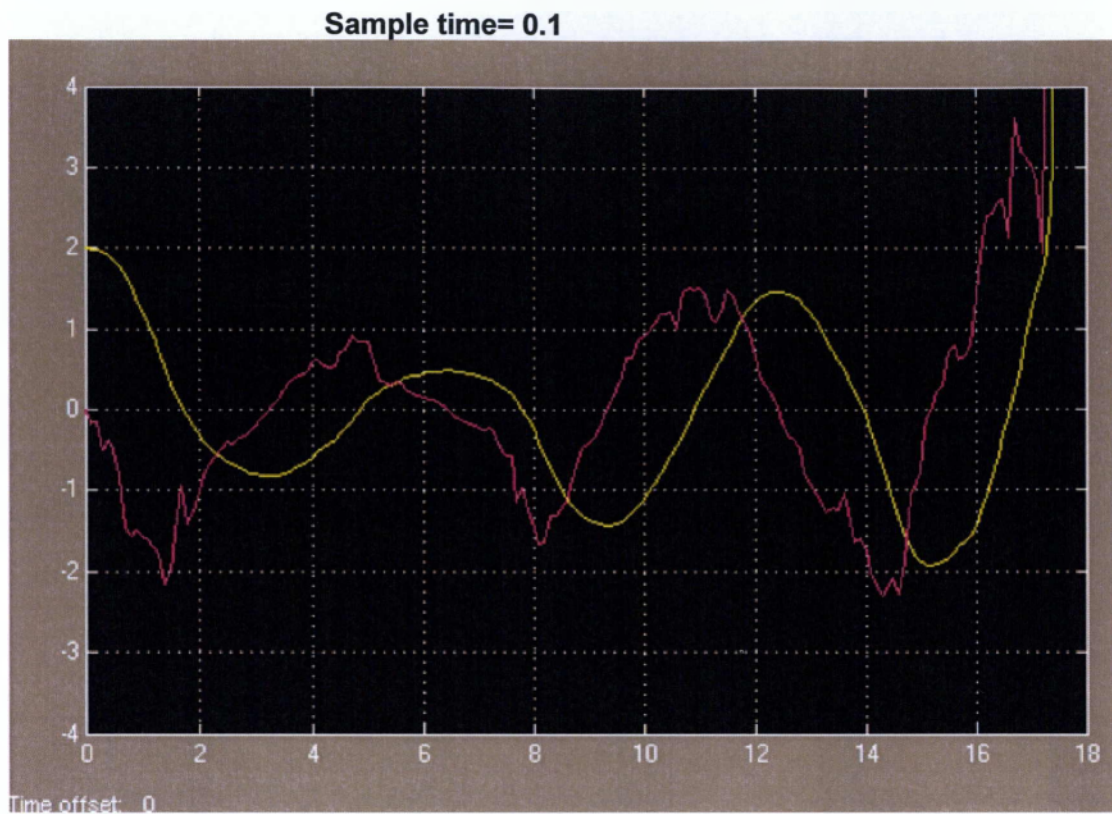
Διάγραμμα 3.2.1.2: Κυματομορφή για $\epsilon=0$, Noise Power = 0.1 και Sample time= 0.1



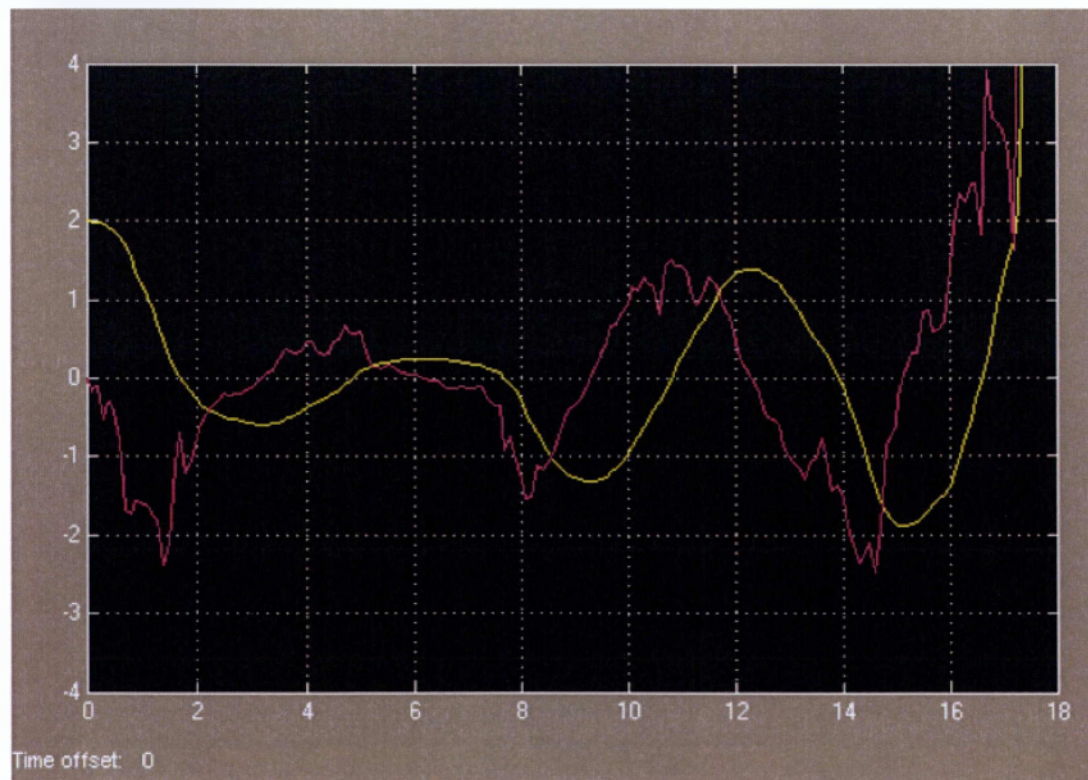
Διάγραμμα 3.2.1.3 Κυματομορφή για $\epsilon=0$, Noise Power = 0.5 και Sample time= 0.1



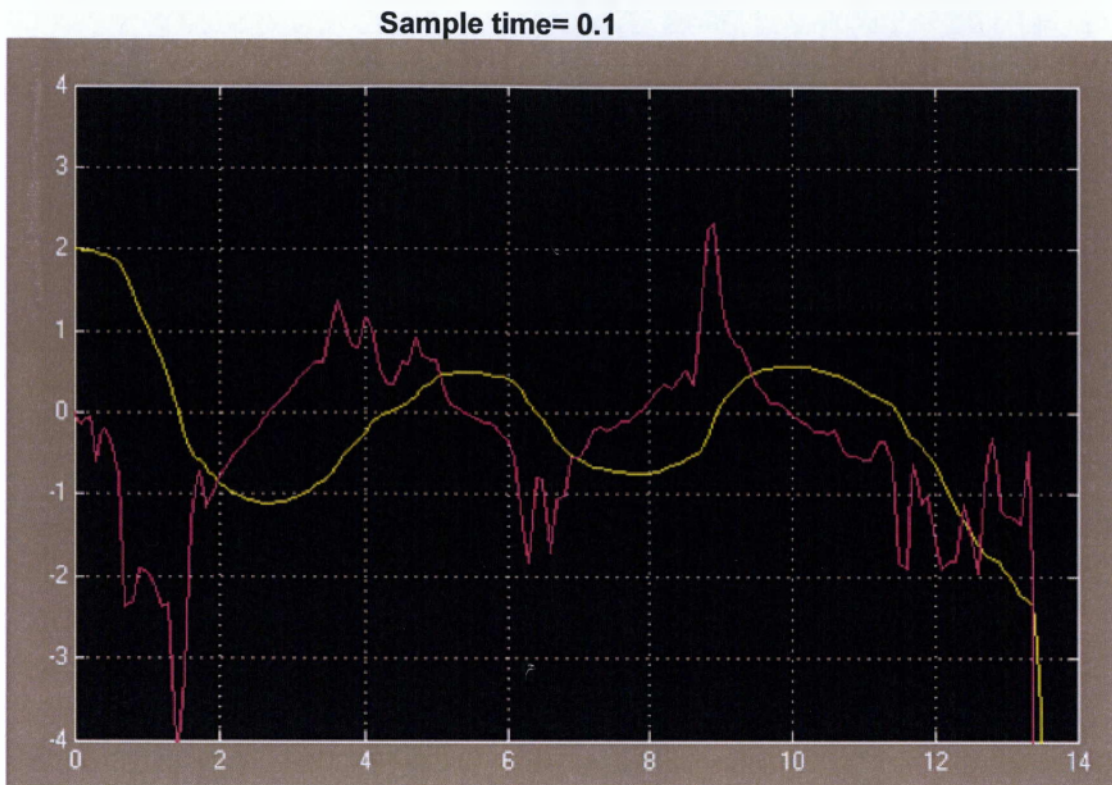
Διάγραμμα 3.2.1.4 Κυματομορφή για $\epsilon=0$, Noise Power = 1.0 και



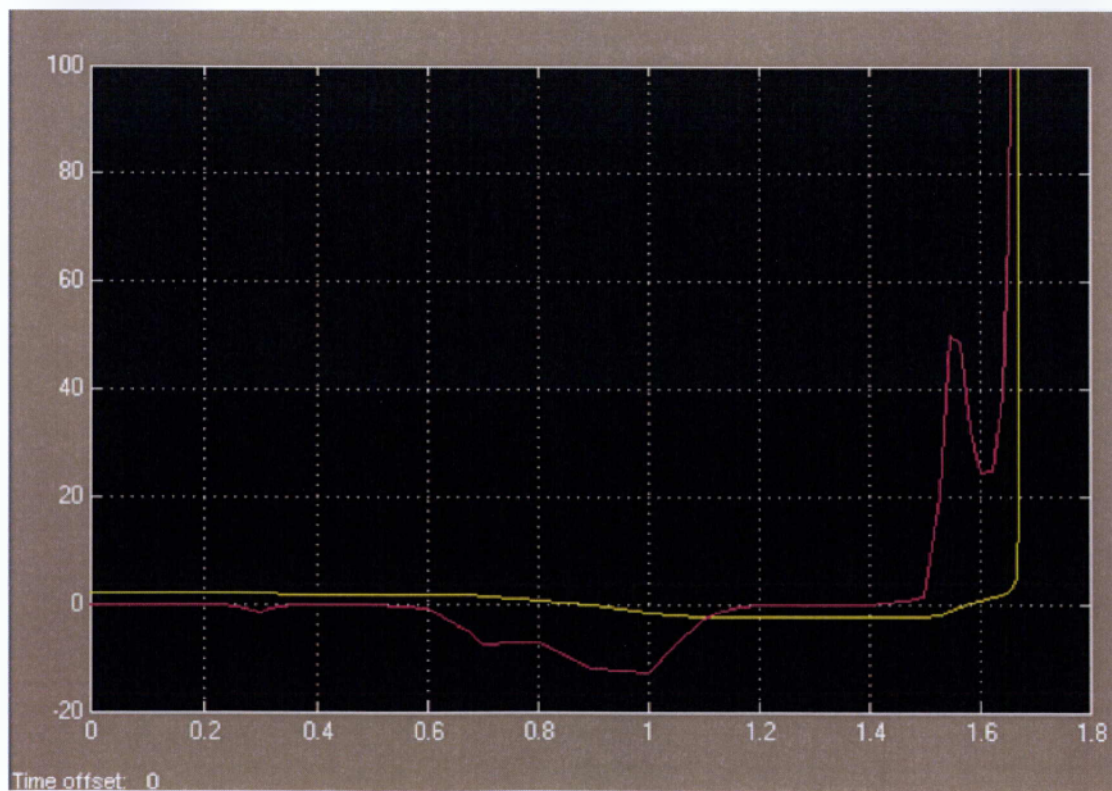
Διάγραμμα 3.2.1.5 Κυματομορφή για $\epsilon=1$, Noise Power = 0.5 και Sample time= 0.1



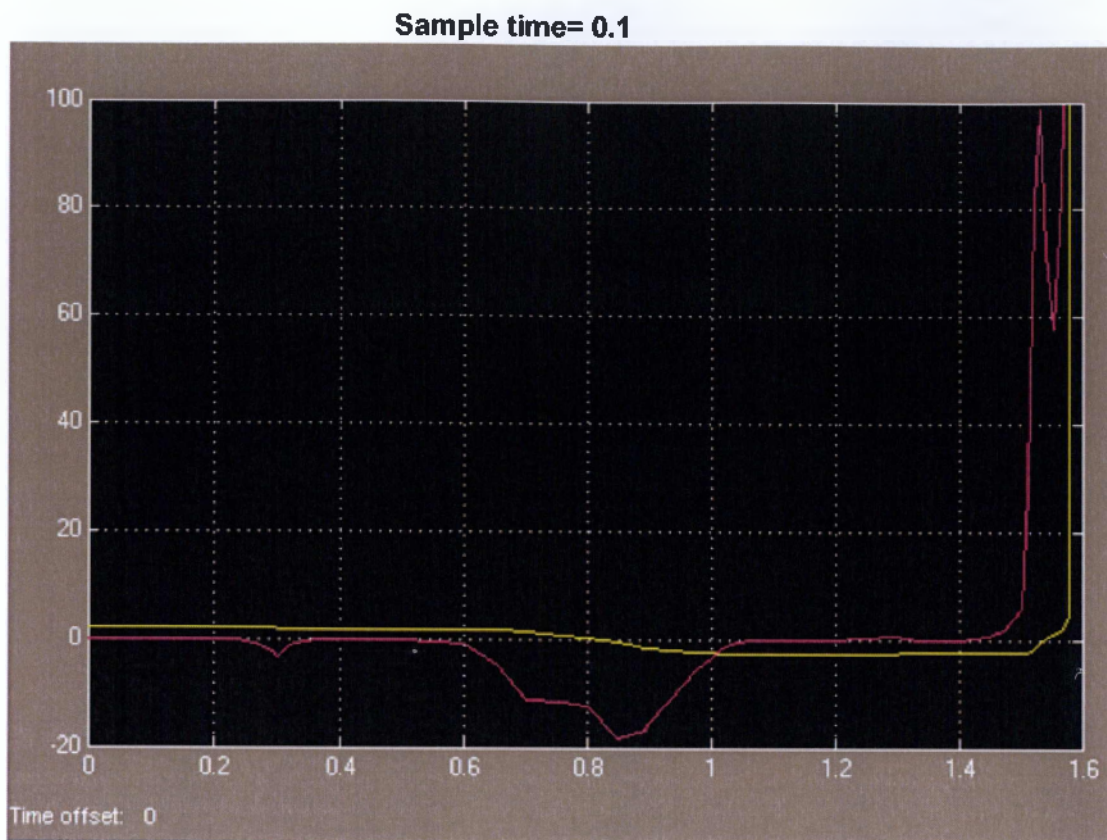
Διάγραμμα 3.2.1.6 Κυματομορφή για $\epsilon=1$, Noise Power = 1.0 και Ταλαντωτής van der Pol
2010



Διάγραμμα 3.2.1.7 Κυματομορφή για $\epsilon=5$, Noise Power = 1.0 και Sample time= 0.1



Διάγραμμα 3.2.1.8 Κυματομορφή για $\epsilon=5$, Noise Power = 0.5 και

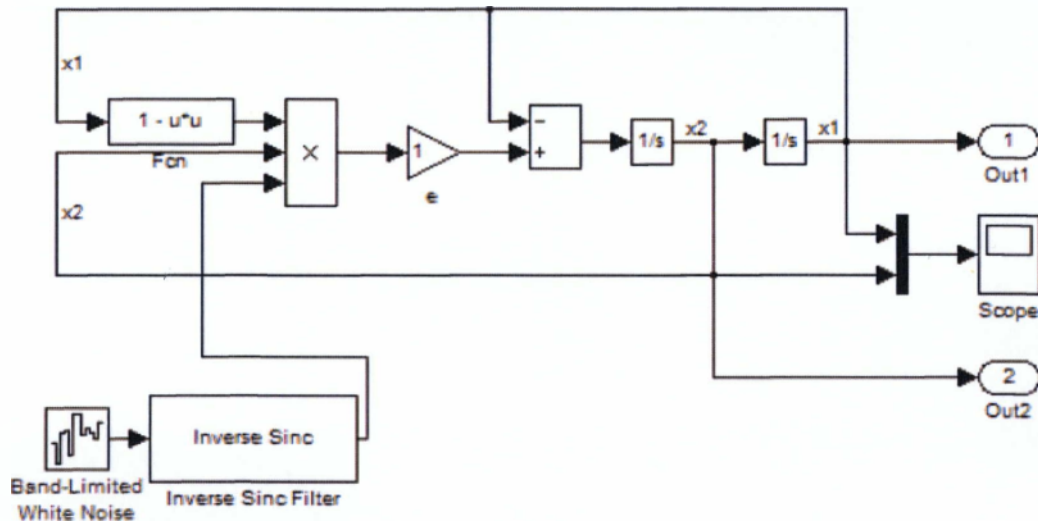


Διάγραμμα 3.2.1.9 Κυματομορφή για $\epsilon=5$, Noise Power =1.0 και Sample time 0,1

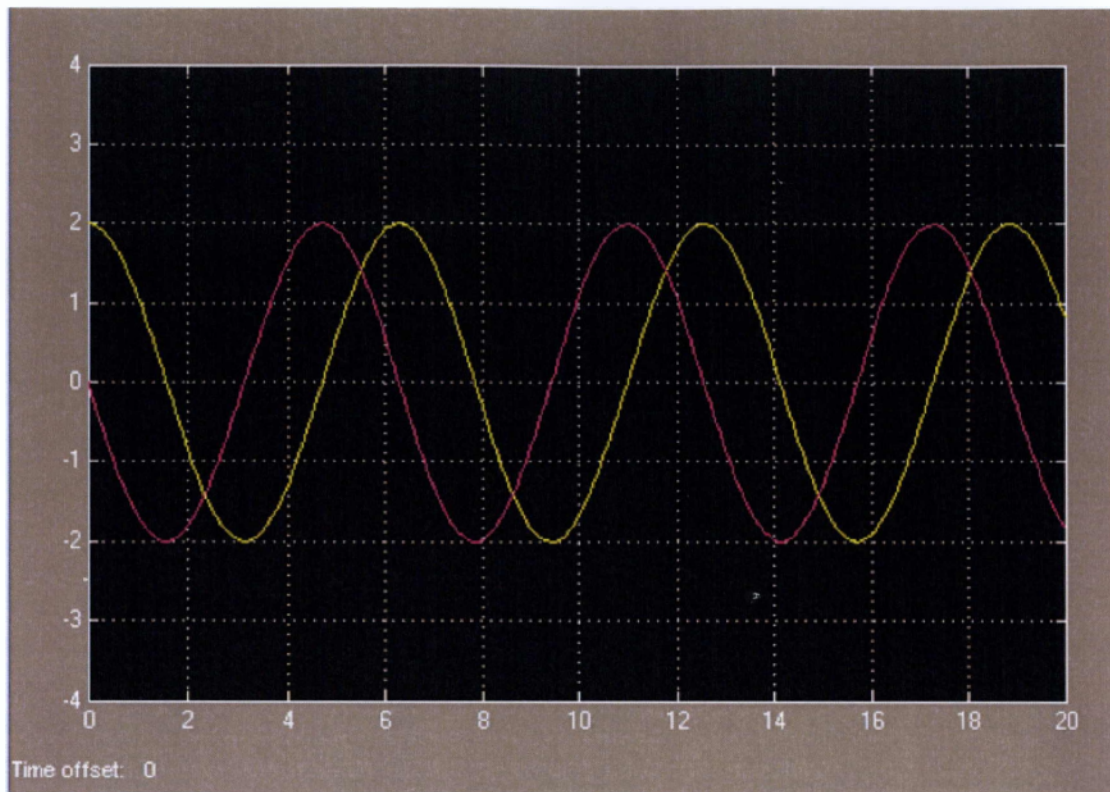
3.2.2 Ροζ θόρυβος (Pink Noise)

Στο SIMULINK δεν υπάρχει έτοιμο block για την παραγωγή ροζ θορύβου. Επομένως θα χρησιμοποιήσουμε το Band-Limited White Noise block με στόχο την παραγωγή του Pink Noise.

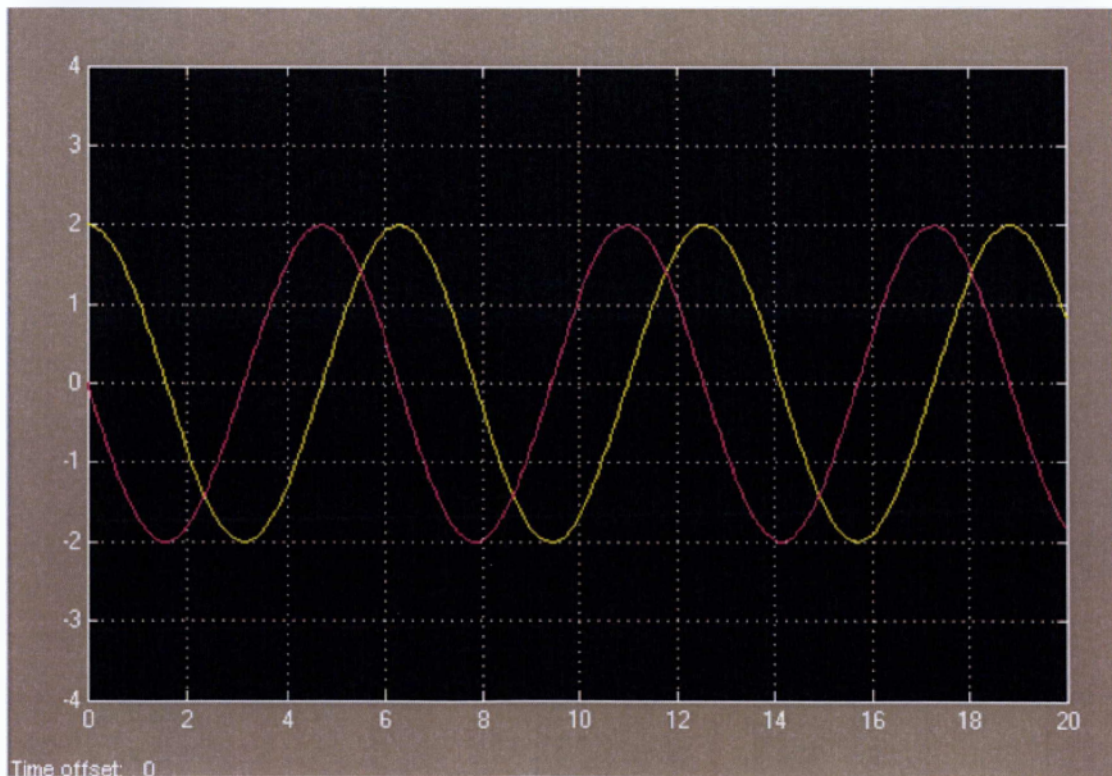
Ο συνδυασμός του Band-Limited White Noise block με το Inverse Sinc Filter block μας οδηγεί στην παραγωγή του Pink Noise και αυτό γίνεται επειδή ο White Noise είναι ο Pink Noise αναστραμμένος κατά $1/f$.



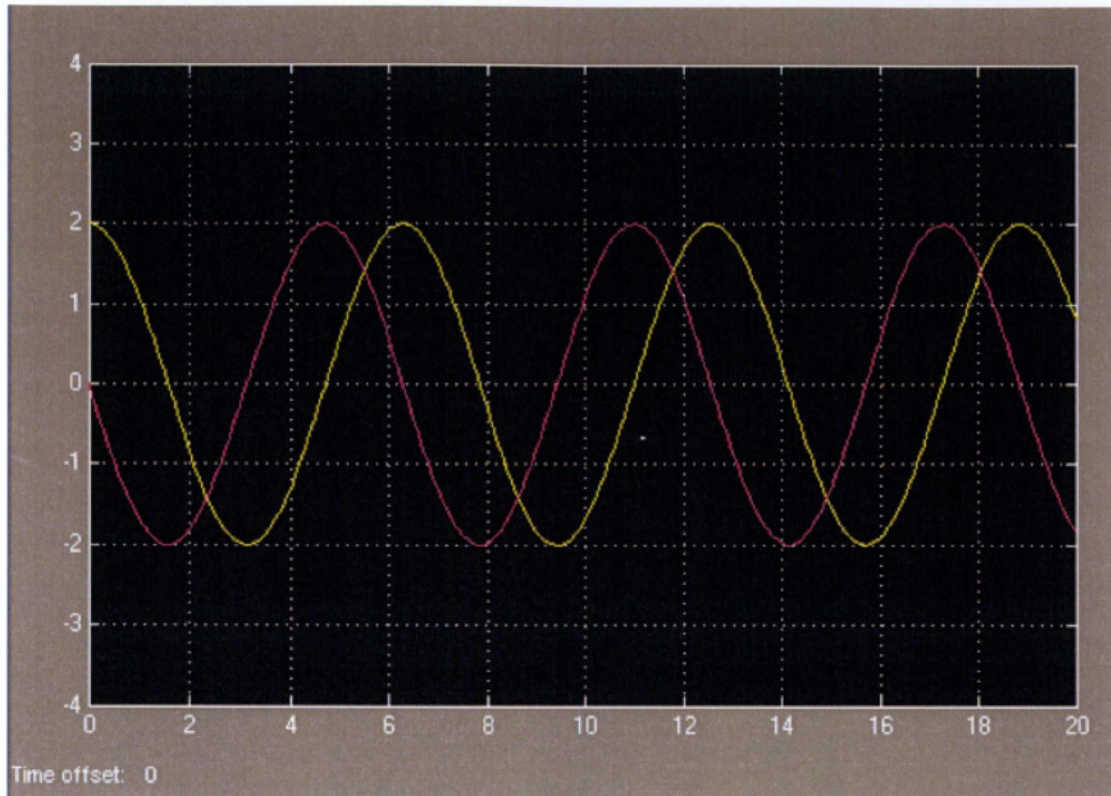
Σχήμα 3.2.2.1 Το block διάγραμμα της εξίσωσης Van der Pol με την προσθήκη του Pink Noise



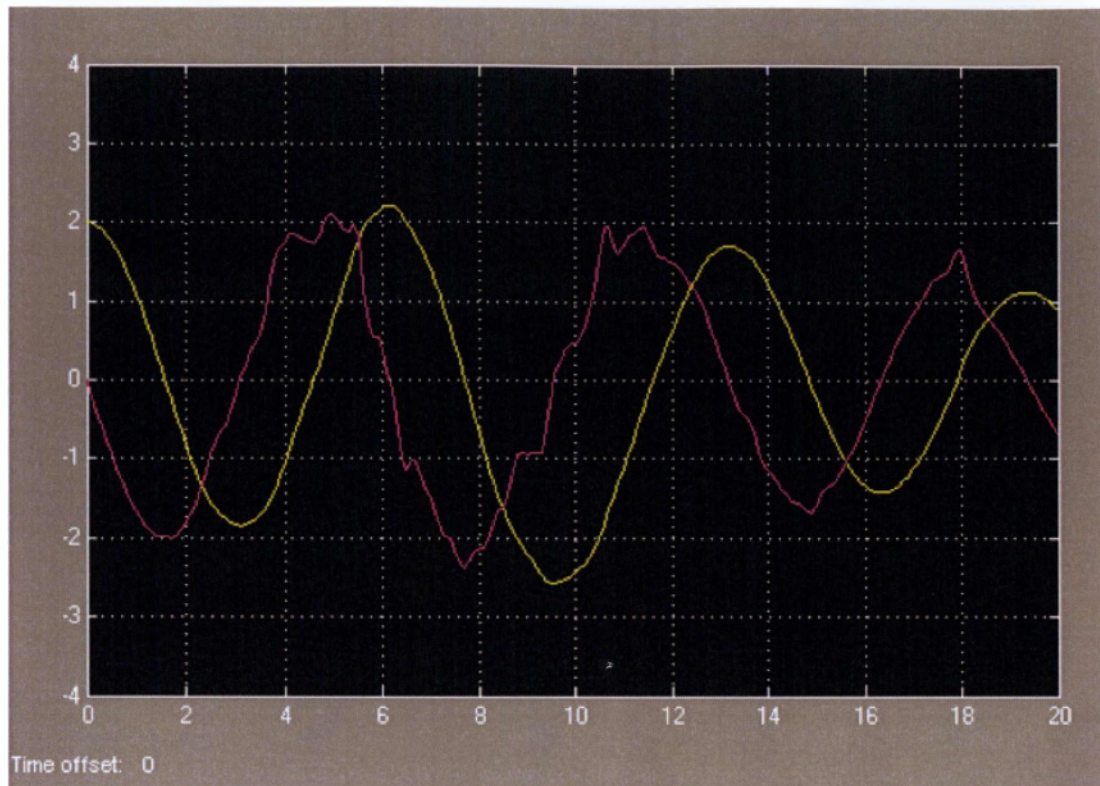
Διάγραμμα 3.2.2.1 Κυματομορφή για $\epsilon=0$, Noise Power = 0.1 και Sample time = 0.1.



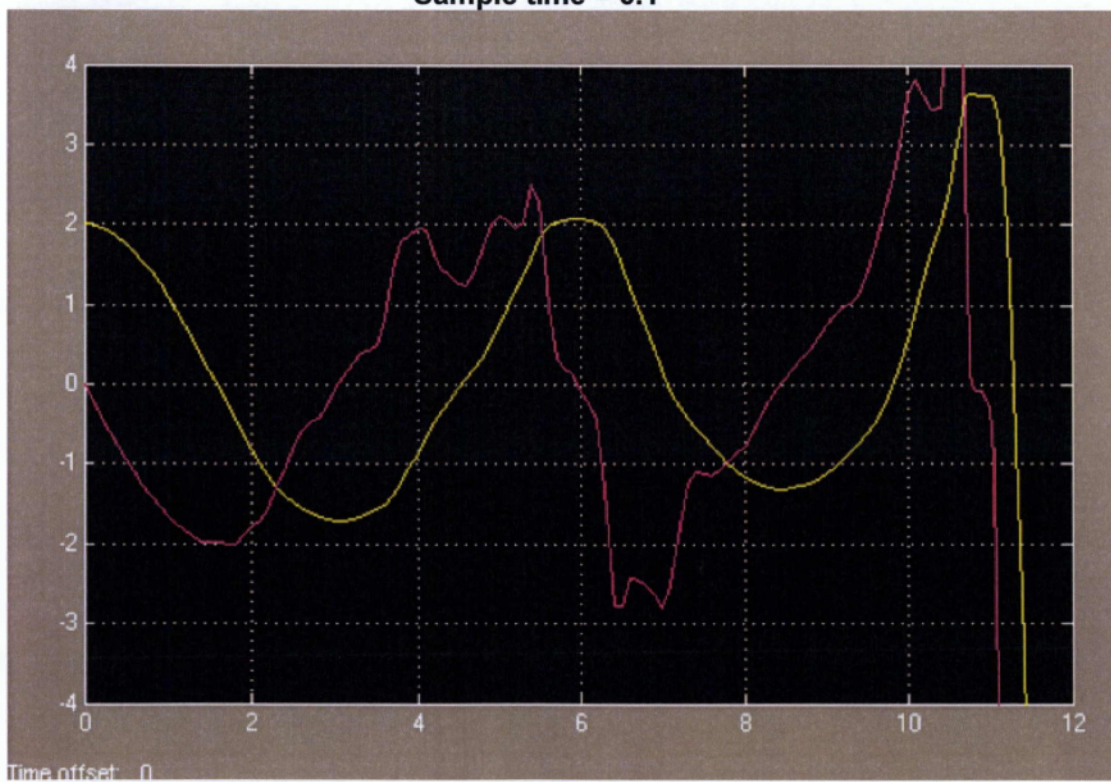
Διάγραμμα 3.2.2.1 Κυματομορφή για $\epsilon=0$, Noise Power =0.5 και Sample time = 0.1



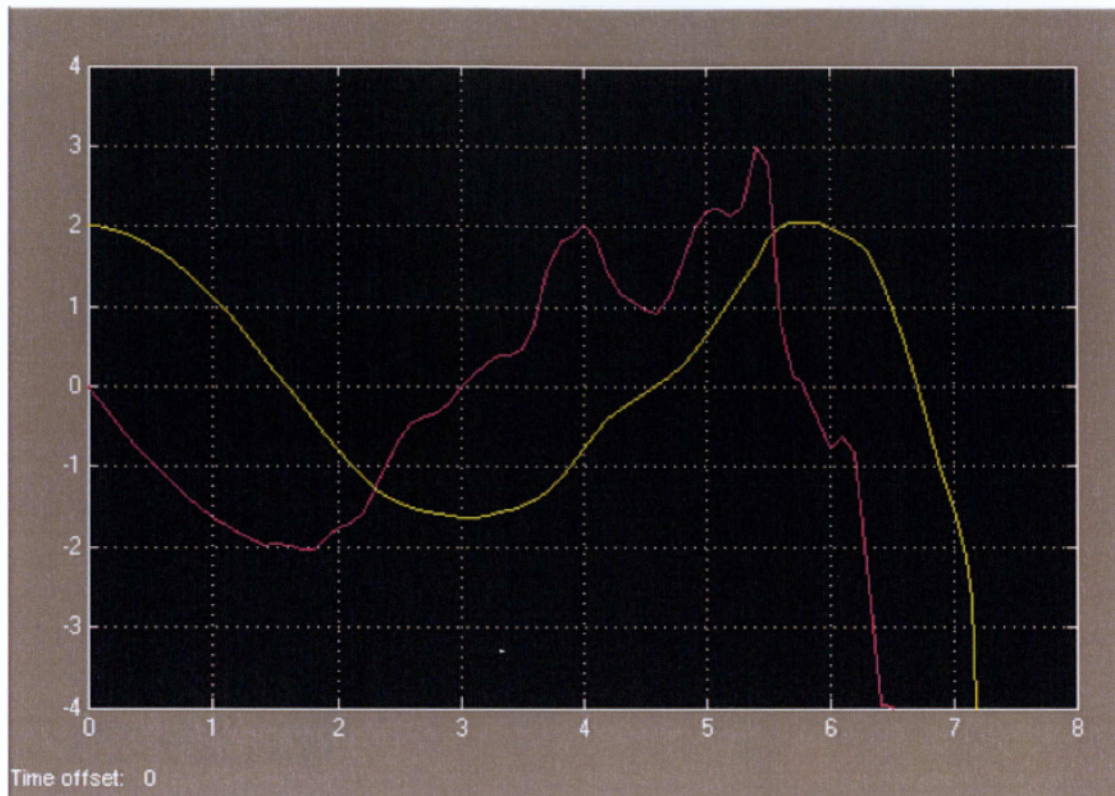
Διάγραμμα 3.2.2.3 Κυματομορφή για $\epsilon=0$, Noise Power =1.0 και Sample time = 0.1



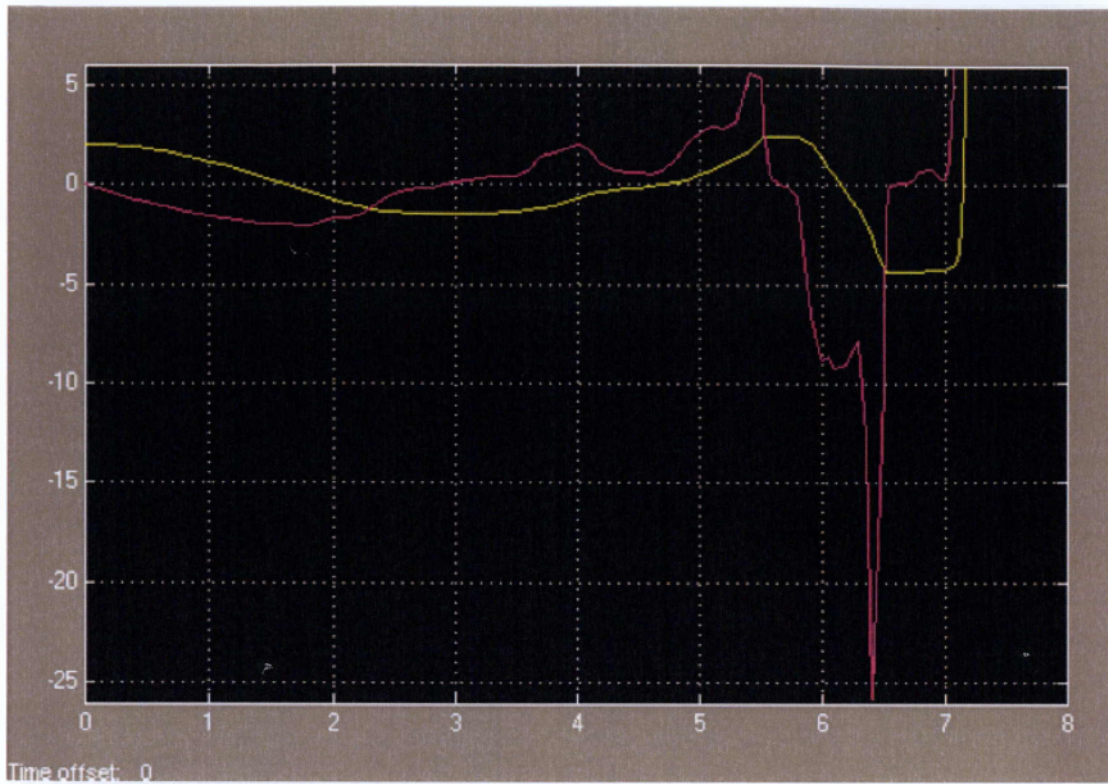
Διάγραμμα 3.2.2.4 Κυματομορφή για $\epsilon=1$, Noise Power =0.1 και Sample time = 0.1



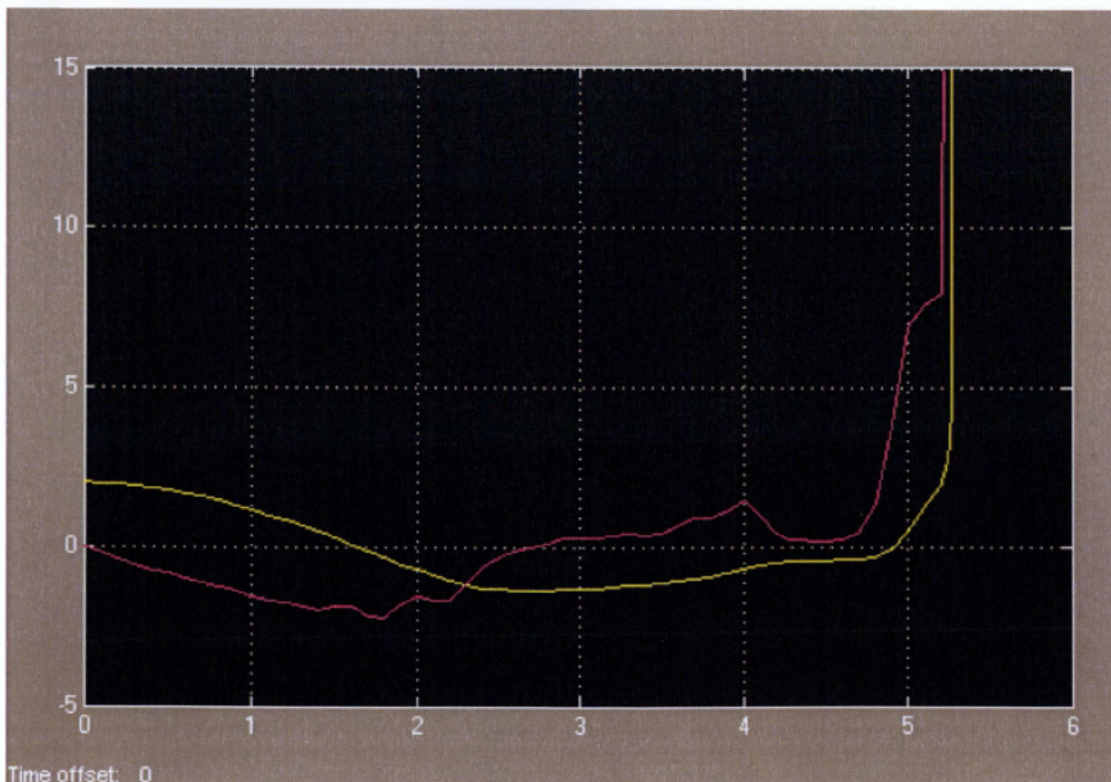
Διάγραμμα 3.2.2.5 Κυματομορφή για $\epsilon=1$, Noise Power = 0,5] και Sample time = 0.1



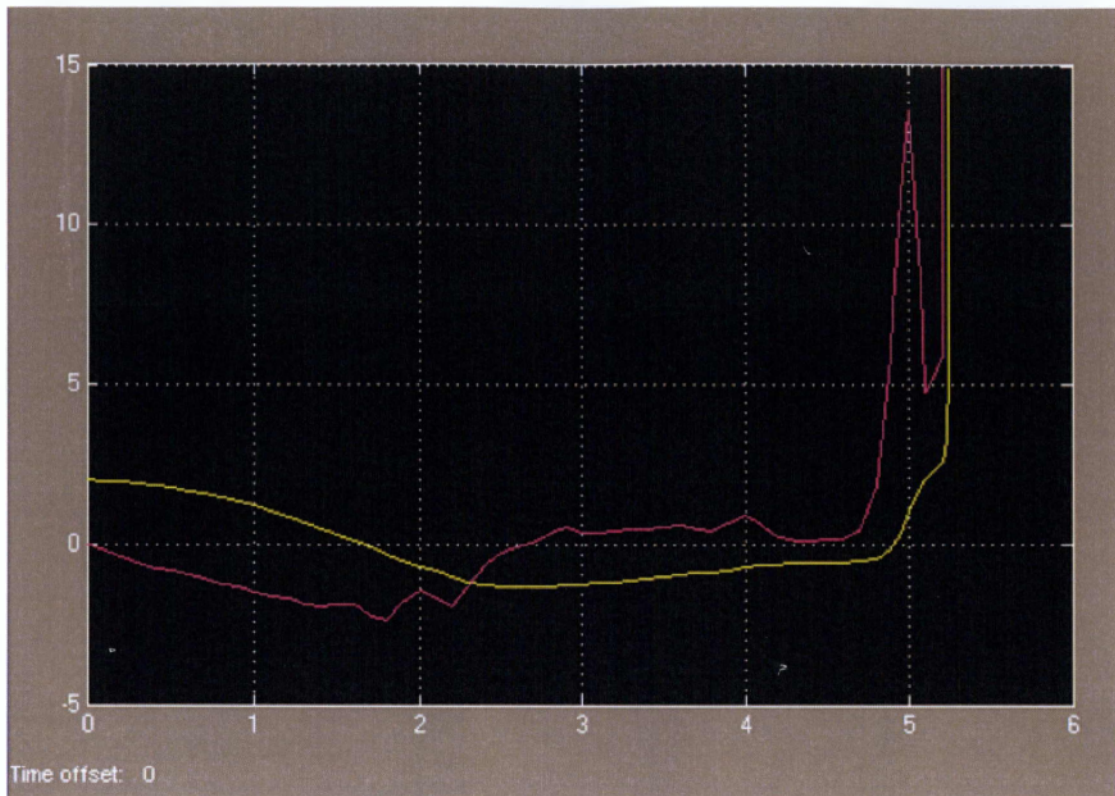
Διάγραμμα 3.2.2.6 Κυματομορφή για $\epsilon=1$, Noise Power = 1,0 και Sample time = 0.1



Διάγραμμα 3.2.2.7 Κυματομορφή για $\epsilon=5$, Noise Power = 0,1 και Sample time = 0.1



Διάγραμμα 3.2.2.8 Κυματομορφή για $\epsilon=5$, Noise Power = 0,5 και Sample time = 0.1



Διάγραμμα 3.2.2.9 Κυματομορφή για $\epsilon=5$, Noise Power =1.0 και Sample time = 0.1

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ**A. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ****A.1 Θεώρημα Υπαρξης και Μοναδικότητας Λύσης Συνήθους Διαφορικής Εξίσωσης πρώτης τάξεως.**

Έστω $f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα και το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0$$

όπου $x(t_0) = x_0$ ανήκει σε μια ανοιχτή περιοχή του $I \times \mathbb{R}$.

Αν σε περιοχή του (t_0, x_0) η f είναι συνάρτηση Lipschitz ως προς x , δηλαδή υπάρχει σταθερά $0 < k < 1$ ώστε για κάθε (x_1, x_2) κοντά στο x και κάθε t κοντά στο t_0 να ισχύει:

$$|f(t, x_2) - f(t, x_1)| < k |x_2 - x_1|$$

τότε υπάρχει μοναδική λύση $x = x(t)$ του προβλήματος αρχικών τιμών, η οποία ορίζεται για κάθε t σε μια περιοχή του t_0 .

Αν επιπλέον η f είναι r -φορές διαφορίσιμη σε ανοιχτή περιοχή του σημείου (t_0, x_0) , τότε η λύση $x = x(t)$ είναι $(r+1)$ -φορές παραγωγίσιμη για κάθε t σε μια ανοιχτή περιοχή του t_0 .

Σε κάθε περίπτωση η λύση $x = x(t)$ του προβλήματος αρχικών τιμών εξαρτάται ομαλά από την αρχική συνθήκη (t_0, x_0) . Συνήθως συμβολίζουμε την εξάρτηση αυτή $x = x(t; t_0, x_0)$.

A.2 Συστήματα Lienard

Η εξίσωση Van der Pol είναι μια ειδική μορφή της γενικότερης διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξεως:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + f(u) \frac{du}{dt} + g(u) = 0$$

Το επόμενο θεώρημα Lienard αποδεικνύει πως αν οι συναρτήσεις f, g πληρούν κάποιες προϋποθέσεις τότε ένα σύστημα που περιγράφεται από μια τέτοια εξίσωση έχει πάντα έναν ευσταθή οριακό κύκλο.

Θεώρημα : Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(u)$ και $g(u)$ ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:

1. $f(u), g(u)$ έχουν κάθε τάξεως παραγώγους
2. $g(u)$ είναι περιττή συνάρτηση, δηλαδή $-g(-u) = g(u)$
3. $g(u)$ σταθερή θετική για κάθε $u > 0$
4. $f(u)$ είναι άρτια συνάρτηση δηλαδή $f(-u) = f(u)$
5. Η παράγουσα $F(u)$ της $f(u)$, η οποία είναι κατ'ανάγκη περιττή συνάρτηση ικανοποιεί τις επιπλέον συνθήκες:
 - (i) $F(a) = 0$ για κάποιο $a > 0$
 - (ii) $F(u) < 0$ για $0 < u < a$
 - (iii) $F(u) > 0$ για $u > a$ και $\lim_{u \rightarrow \infty} F(u) = \infty$.

Τότε το σύστημα που περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση Lienard έχει ευσταθή οριακό κύκλο, ο οποίος περικλείει την αρχή (δηλαδή το σημείο $(0,0)$) του χώρου φάσεων.

Για την εξίσωση Van der Pol (0.2.9) τα 1,2,3,4 είναι προφανή. Επαληθεύουμε το 5. Είναι:

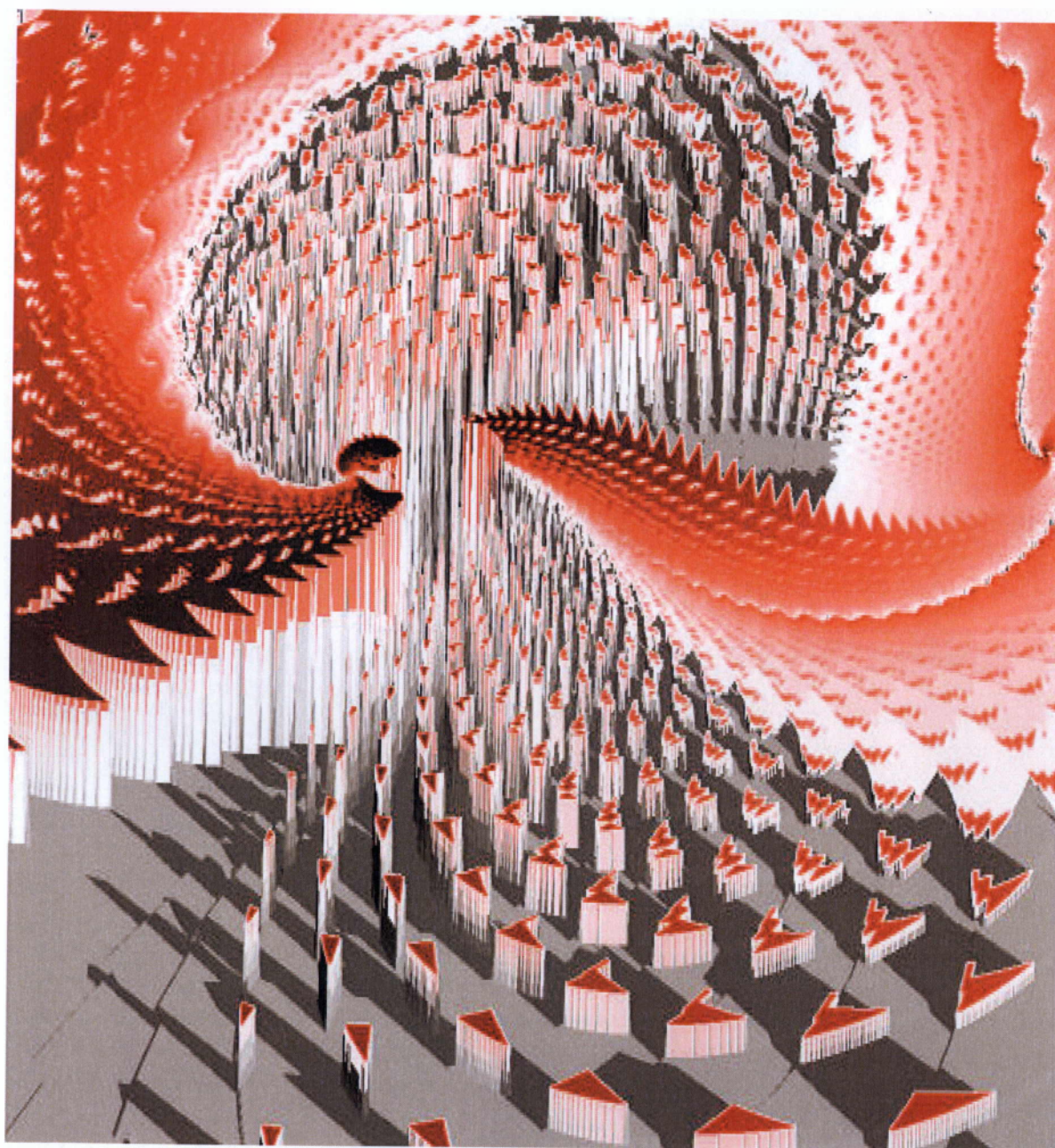
$$F(u) = \int_0^u f(w)dw = \int_0^u \mu(w^2 - 1)dw = \mu\left(\frac{u^3}{3} - u\right) = \mu u\left(\frac{u^2}{3} - 1\right)$$

Τότε $F(\sqrt{3}) = 0$, $F(u) < 0$ για $u < \sqrt{3}$
 $F(u) > 0$ για $u > \sqrt{3}$

και $\lim_{u \rightarrow \infty} F(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \mu\left(\frac{u^3}{3} - u\right) = +\infty$

Άρα το σύστημα έχει μοναδικό οριακό κύκλο ο οποίος είναι ευσταθής, γύρω από το (ασταθές) σημείο ισορροπίας $(0,0)$ του χώρου φάσεων.

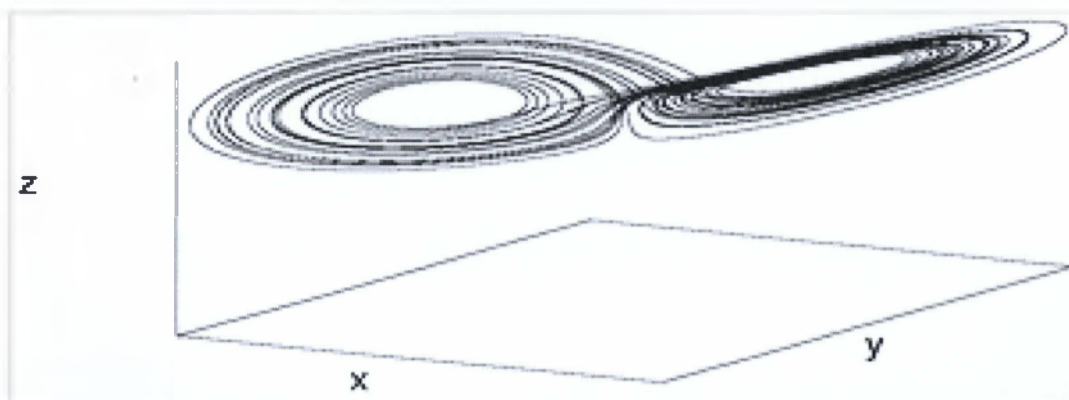
Β. ΧΑΟΣ



Το χάος περιγράφει ένα σύστημα που είναι προβλέψιμο σε γενικές γραμμές αλλά απρόβλεπτο στην πράξη. Με άλλα λόγια, αν και το σύστημα ακολουθεί τους αιτιοκρατικούς κανόνες, η χρονική εξέλιξή της εμφανίζεται τυχαία.

Στη δυναμική θεωρία συστημάτων το χάος, όπου εμφανίζεται στα απεριοδικά ή σχεδόν περιοδικά αιτιοκρατικά συστήματα, έγκειται στην ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. Αυτό σημαίνει ότι μια μικρή αλλαγή στην αρχική κατάσταση οδηγεί σε μεγάλες μεταβολές στη συμπεριφορά του συστήματος. Επειδή οι αρχικές συνθήκες είναι σπανίως γνωστές στα πραγματικά συστήματα, η προβλεψιμότητα είναι σαφώς περιορισμένη.

Η έννοια του χάους έχει χρησιμοποιηθεί για να εξηγήσει πώς τα συστήματα που πρέπει να υπόκεινται στους γνωστούς νόμους της φυσικής, όπως ο καιρός, μπορούν να είναι προβλέψιμα βραχυπρόθεσμα αλλά προφανώς τυχαίος σε ένα πίο μακροχρόνιο χρονικό διάστημα.



Σχήμα Β.1: Μια ενιαία τροχιά του attractor του Lorenz

Το χάος έχει παρατηρηθεί συνήθως στα ελεγχόμενα εργαστηριακά πειράματα. Τα ηλεκτρικά κύκλωμα και οι αναλογικοί υπολογιστές ήταν μερικά από τα πρώτα παραδείγματα, ίσως λόγω της πίστης των αιτιοκρατικών προτύπων σε αυτά τα συστήματα. Οι χημικές αντιδράσεις, τα οπτικά συστήματα όπως τα λέιζερ και τα ρευστά, πειράματα δυναμικής έχουν ως σκοπό επίσης να εκθέσουν τη χαοτική δυναμική. Το χωρίς τριβή διπλό εκκρεμές παρουσιάζει χαοτικές τροχιές

Η ύπαρξη του χάους στα φυσικά φαινόμενα είναι πίο αμφισβητούμενη. Οι νόμοι της Ουράνιας Μηχανικής μπορούν να προσεγγιστούν χρησιμοποιώντας τους νόμους του Newton με υψηλή ακρίβεια. Δεδομένου ότι τα συστήματα n -σωμάτων που υπόκεινται στη βαρυτική έλξη περιέχουν τις χαοτικές τροχιές για $n \geq 3$, οι χαοτικές τροχιές των ουράνιων σωμάτων είναι πιθανώς κυρίαρχες στο ηλιακό σύστημα. Σε άλλες περιοχές όπως η δυναμική πληθυσμών, ο καιρός και το κλίμα, το ζήτημα καλύπτεται λόγω της ερώτησης εάν η διαδικασία μπορεί να διαμορφωθεί πειστικά ως αιτιοκρατικό σύστημα.

Ο κοινός νους του πρώιμου 19ου αιώνα αρθρώθηκε από τον Laplace, που έθεσε ως αίτημα: «σε μια ορισμένη στιγμή είναι δυνατόν να είναι γνωστές όλες τις δυνάμεις που θέτουν τη φύση στην κίνηση, και όλες τις θέσεις όλων των στοιχείων από τα οποία η φύση αποτελείται» και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι «τίποτα δεν θα ήταν αβέβαιο και το μέλλον ακριβώς όπως το παρελθόν θα ήταν παρόν μπροστά στα μάτια του.» Εντούτοις, ο ενθουσιασμός του Laplace για την προβλεψιμότητα των αιτιοκρατικών συστημάτων δεν συμμερίστηκε από το Maxwell, ο οποίος μερικές δεκαετίες αργότερα όρισε την αβεβαιότητα των ταχυτήτων μορίων μετά από τις συγκρούσεις ως θεμελιώδες μέρος της κινητικής θεωρίας αερίων του. Μέχρι το τέλος του 19ου αιώνα, ο Poincare είχε ανακαλύψει τις ομοκλινικές τροχιές, που θα αναγνωρίζονταν αργότερα ως αποκαλυπτικά γνωρίσματα του χάους, στο επίπεδο περιορισμένο πρόβλημα των τριών σωμάτων.

Το 1927, ο Van der Pol παρατήρησε τον «τυχαίο θόρυβο» σε ένα ραδιοκύκλωμα που οδηγήθηκε σε ορισμένες συχνότητες, αλλά τον θεώρησε ως ένα συναφές φαινόμενο. Το 1945 οι Cartwright και Littlewood, που προσκλήθηκαν από τη βρετανική ραδιο - ερευνητική επιτροπή, η οποία εργαζόταν σε ένα πρότυπο ταλαντωτή Van der Pol, προσδιόρισαν την έννοια του « τυχαίου θορύβου» ως δυναμική στις εξισώσεις η οποία διευκρινίστηκε τελικά από τον Levinson το 1949. Αυτές οι εργασίες έπεσαν στην προσοχή Smale, ο οποίος ανέπτυξε το λεγόμενο «πέταλο» Smale ως εξιδανικευμένη μαθηματική μοντελοποίηση των παρατηρήσεων Levinson. Η σημαντική διορατικότητα του Smale έγκειται στην ενοποίηση των ομοκλινικών τροχιών, που αποκάλυψε ο Poincare στην Ουράνια Μηχανική με το θόρυβο του ταλαντωτή Van der Pol στον Ηλεκτρισμό.

Την ίδια σχεδόν εποχή, στις αρχές της δεκαετίας του '60, ο μετεωρολόγος Lorenz προσπαθούσε να καταλάβει τις αποτυχίες των γραμμικών μοντέλων πρόβλεψης των καιρικών φαινομένων. Χρησιμοποιώντας έναν από τους παγκοσμίως πρώτους στη μαζική παραγωγή ηλεκτρονικούς υπολογιστές για να ποσομοιώσει την ατμοσφαιρική δυναμική, διαπίστωσε ότι οι μακροχρόνιες απεριοδικές τροχιές θα μπορούσαν να παραχθούν αρκετά εύκολα και φυσικά. Κατόπιν, σε ένα από τα πιο καλά στις τυχαίες ανακαλύψεις επεισόδια στην ιστορία του υπολογιστή κατά τη στρογγύλευση του σφάλματος, διαπίστωσε ότι η απεριοδικότητα συνδέεται με την ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες.

Το 1963 με τη βοήθεια του Saltzman μείωσε τις παραμέτρους, κατά τη μαθηματική μοντελοποίηση της ατμόσφαιρας, σε μια διαφορική εξίσωση με τρεις μεταβλητές που παρήγαγαν τον ελκυστή (attractor) του Lorenz. Ο Lorenz έδωσε αργότερα μια διάλεξη που τιλοφορήθηκε προβλεψιμότητα: Το χτύπημα των φτερών μιας πεταλούδας στη Βραζιλία πυροδοτεί έναν ανεμοστρόβιλο στο Τέξας, το οποίο σκιαγραφεί την έννοια της ευαίσθητης εξάρτησης στις αρχικές συνθήκες, για να γίνει γενικά γνωστή ως «επίδραση της πεταλούδας».

Επίσης στη δεκαετία του '60, ο Ueda έθεσε ένα μαθηματικό πρότυπο σε έναν αναλογικό υπολογιστή που επέδειξε τη χαστική δυναμική. Εντούτοις, αυτή η εργασία δεν δημοσιεύθηκε παρά μερικά χρόνια αργότερα (Ueda, 1970).

Το 1975, ο Yorke και ο διδακτορικός φοιτητής του Li έδειξαν ότι η συνεχής απεριοδική συμπεριφορά θα μπορούσε να βρεθεί στις μονοδιάστατες απεικονίσεις. Το άρθρο τους (Li και Yorke, 1975) έπλασε τον όρο « χάος» για τα διάφορα φαινόμενα που παρουσίασαν απεριοδικότητα μαζί με την ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. Εκτός από το να δείξουν ότι η ύπαρξη μιας περιοδικής τροχιάς σε μία μονοδιάστατη συνεχή απεικόνιση υπονοεί αυτήν την ευαίσθητη εξάρτηση, παρουσίασαν μια άλλη αξιοπρόσεκτη συνέπεια: την ύπαρξη απείρως πολλών άλλων περιοδικών τροχιών. Το τελευταίο μέρος του αποτελέσματος είχε προηγηθεί μερικά έτη (Sharkovsky, 1964), που είναι τώρα γνωστό ως «τάξη» Sharkovsky (Μάιος, 1976). Αυτός παρουσίασε τη λογιστική απεικόνιση ως πρότυπο πληθυσμών, μοντέλο πλούσιο σε έννοιες της σημερινής επιστήμης του χάους, όπως αυτές των διακλαδώσεων και των χαοτικών τροχιών.

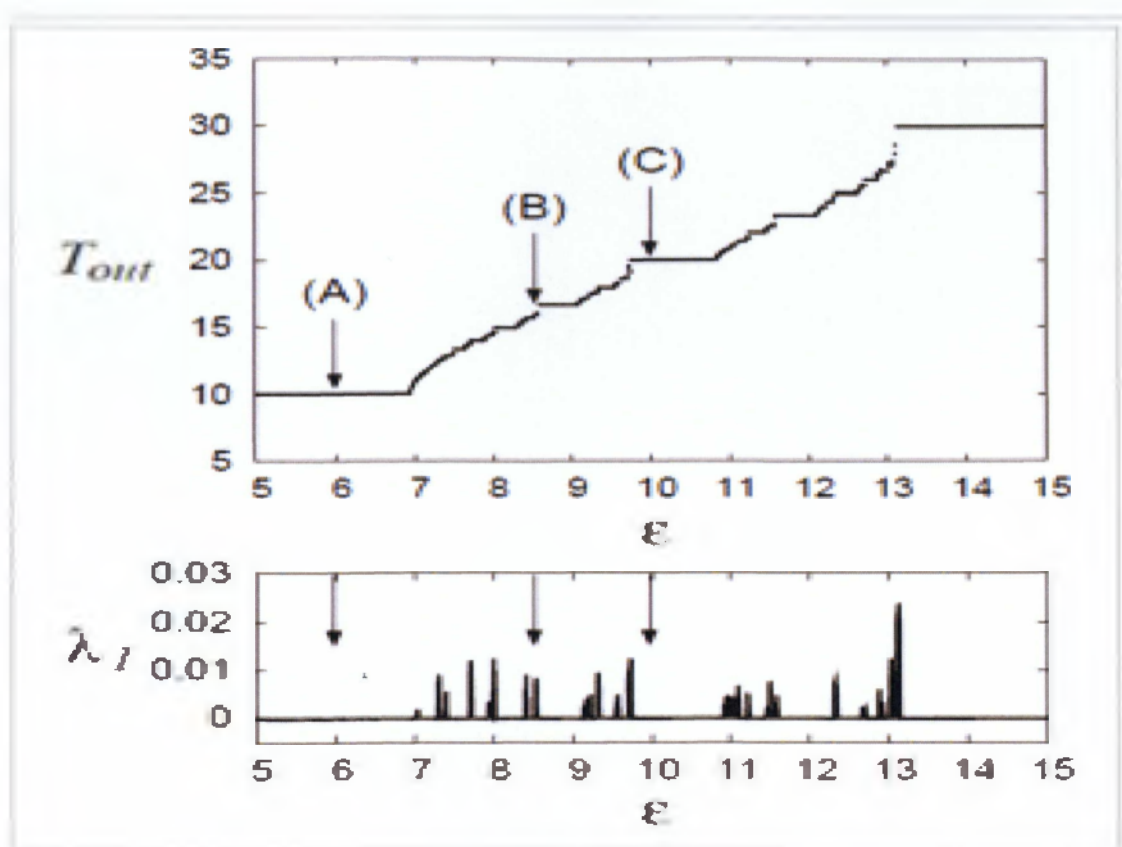
Η ύπαρξη του χάους έχει τις σημαντικές συνέπειες για τη διαμόρφωση των πραγματικών συστημάτων. Ακόμα κι αν ένα σύστημα εμφανίζει την τυχαία συμπεριφορά, οι στρατηγικές διαμόρφωσης δεν χρειάζονται να περιοριστούν στα πιθανοθεωρητικά μοντέλα. Η ερώτηση που υποβάλλεται συχνά για ένα σύστημα όταν εμφανίζει πολύπλοκη συμπεριφορά είναι η εξής: το σύστημα είναι τυχαίο ή χαοτικό; Μια πιο χρήσιμη ερώτηση θα ήταν εάν το σύστημα προσεγγίζεται καλύτερα χρησιμοποιώντας ένα αιτιοκρατικό μοντέλο που επιτρέπει τη χαοτική δυναμική, ή εναλλακτικά από ένα πιθανοθεωρητικό (στοχαστικό), ή τέλος από ένα μικτό αιτιοκρατικό - πιθανοθεωρητικό μοντέλο.

Ο Van der Pol είχε εξετάσει ήδη την απόκριση του ταλαντωτή σε μία εξωτερική περιοδική διέγερση στην εργασία του το 1920, που μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = F \cos\left(\frac{2\pi t}{T_{in}}\right)$$

Υπάρχουν δύο συχνότητες σε αυτό το σύστημα, δηλαδή η ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή (που είναι 1) και η συχνότητα της εξωτερικής περιοδικής διέγερσης.

Η απόκριση του συστήματος παρουσιάζεται στο σχήμα Β.2 για $T_{in} = 10$ και $F = 1.2$. Παρατηρείται ότι η μέση περίοδος T_{out} του x βρίσκεται συχνά στην τιμή mT_{in}/n , όπου m και n είναι ακέραιοι αριθμοί. Είναι επίσης γνωστό ότι το χάος μπορεί να διαπιστωθεί στο σύστημα όταν η μη γραμμικότητα του συστήματος είναι αρκετά ισχυρή.



Σχήμα Β.2 Μια απόκριση του συστήματος με μία εξωτερική περιοδική διέγερση με $T_{in}=10$ και $F=1.2$

Οι Van der Pol και Van der Mark (1927) εξέτασαν ένα ηλεκτρικό κύκλωμα που αποτελείται από μια αντίσταση, έναν πυκνωτή και έναν λαμπτήρα NE, και άκουσαν την απόκριση του συστήματος με την παρεμβολή των ακουστικών τηλεφώνου στο κύκλωμά τους. Εκτός από τη συνήθη συμπεριφορά του ταλαντωτή άκουσαν τους τυχαίους θορύβους πριν από την περίοδο των αλμάτων στην επόμενη τιμή της περιόδου. Δήλωσαν ότι αυτός ο θόρυβος είναι ένα συναφές φαινόμενο, αλλά σήμερα θεωρείται ότι άκουσαν το αιποκρατικό χάος κατά τους Yoshisuke Ueda (1961) και Edward Lorenz (1963). Εντούτοις, ο Van der Pol δεν προσδιόρισε τη δομή που κρύβεται κάτω από ένα χαοτικό ελκυστή (ευσταθή οριακό κύκλο) στο διάγραμμα φάσης. Ο Lorenz δημόσιευσε μια εικόνα ενός χαοτικού ελκυστή στο διάγραμμα φάσης στις αρχές της δεκαετίας του '60 και ο Ueda στις αρχές της δεκαετίας του '70.

Γ. ΒΙΟΓΡΑΦΙΑ ΤΟΥ BALTHAZAR VAN DER POL



Ήταν πρωτοπόρος στον τομέα του ραδιοφώνου και μια γνωστή προσωπικότητα στον τομέα των διεθνών τηλεπικοινωνιών, αλλά έθεσε επίσης τα μαθηματικά προβλήματα που αντιμετωπίστηκαν στη ραδιοφωνία. Μέχρι τώρα οι εργασίες του έχουν αποτελέσει τη βάση ενός μεγάλου μέρους της σύγχρονης θεωρίας των μη γραμμικών ταλαντώσεων, και έχει δώσει το όνομά του στην πιο χαρακτηριστική εξίσωση εκείνης της θεωρίας.

Ο Balthazar van der Pol γεννήθηκε στην Ουτρέχτη στις 27 Ιανουαρίου 1889, ήταν γιός του Balthazar van der Pol (είχε το ίδιο όνομα με τον πατέρα του) και της G.C.Steffens.

Σπούδασε στο πανεπιστήμιο της Ουτρέχτης από το 1911 ως το 1916 και αποφοίτησε το 1916 με βαθμό άριστα στη φυσική. Το ίδιο έτος ήρθε στην Αγγλία όπου αρχικά εργάζεται κάτω από την επίβλεψη του καθηγητή J.A.Fleming στο Πανεπιστημιακό κολέγιο του Λονδίνου, και στη συνέχεια στο Cambridge το 1917 για να εργαστεί στο εργαστήριο Cavendish κάτω από την επίβλεψη του J.J.Tomson, όπου συνάντησε τον Appleton, με το οποίο είχε πολλά κοινά ενδιαφέροντα σε εκείνο το στάδιο.

Στις 22 Ιουνίου 1917 στο Λονδίνο παντρεύτηκε την Pietronetta Posthuma, με την οποία απέκτησε δύο κόρες και έναν γιο.

Με την επιστροφή του στην Ολλανδία υπέβαλε τη διατριβή του «Η επίδραση σε ένα ιονισμένο αέριο της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας και οι εφαρμογές της στην εκπομπή σήματος, όπως καταδεικνύεται από μετρήσεις εκκένωσης αίγλης (glow-discharge)», για την οποία ανακηρύχτηκε διδάκτορας της επιστήμης με βαθμό άριστα από το πανεπιστήμιο της Ουτρέχτης στις 27 Απριλίου 1920.

Από το 1919 ως το 1922 εργάστηκε ως βοηθός καθηγητής δίπλα στον H.A.Lorentz στο ερευνητικό εργαστήριο του Teyler's Institute Haarlem, και το 1922 διορίστηκε επικεφαλής του τμήματος φυσικής στο ερευνητικό εργαστήριο N.V.Philips στο Eindhoven, όπου έγινε αργότερα διευθυντής της επιστημονικής ραδιο-έρευνας. Το 1927 του απενεμήθη ο τίτλος «A Knight of the Order of Oranje Nassau» για την καθιέρωση της πρώτης ραδιοτηλεφωνικής (radio-telephonic) επικοινωνίας μεταξύ των Ολλανδικών & των Κάτω ανατολικών Χωρών των Ινδών. Παρέμεινε στη Philips έως το 1949, ενώ ταυτόχρονα με το διορισμό του ως διευθυντής στη Philips καθιέρωσε τη θεωρητική μελέτη της ηλεκτρικής ενέργειας στο τεχνικό πανεπιστήμιο Delft από το 1938 ως το 1949. Από το 1945 ως το 1946 διετέλεσε επιπλέον Πρόεδρος του Temporary University στο Eindhoven που ιδρύθηκε για να αντικαταστήσει άλλα ολλανδικά πανεπιστήμια στα κατεχόμενα εδάφη, ενώ για την υπηρεσία του ως Πρόεδρος του απενεμήθη ο τίτλος «A Knight of the Order of the Netherlands Lion» το 1946.

Από το 1949 ως το 1956 διετέλεσε διευθυντής του Comite Consultatif International des Radiocommunications (C.C.I.R) στη Γενεύη ενώ υπηρέτησε ως μόνιμος υποδιευθυντής του C.C.I.R ήταν ο τεχνικός σύμβουλος στη διεθνή ένωση Telecommunications (I.T.U.) στον προγραμματισμό και την ανάπτυξη των ραδιοεπικοινωνιών κατά τη διάρκεια των μεταπολεμικών ετών.

Ο Balthazar van der pol πέθανε στις 6 Οκτωβρίου 1959, στο Wassenaar, στην Ολλανδία

Η παραπάνω βιογραφία είναι δημοσιευμένη στο Journal of the London Mathematical Society ως αφιέρωμα στη μνήμη του Balthazar van der pol από τον M. L. CARTWRIGHT το 1960 .

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ - ΑΝΑΦΟΡΕΣ

1. S. H. Strogatz: *Nonlinear Dynamics and Chaos with applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*, Addison – Wesley 1994
 2. D. W. Jordan, P. Smith: *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Oxford University Press, 2007
 3. A. F. Vakakis: *An Introduction to Nonlinear Dynamics*, Graduate Notes, National Technical University of Athens, 2002
 4. Κ. Καρούμπalos, Γ. Φιλοκύπρου: *Μαθήματα Ηλεκτρονικής*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Αθηνών 1982
 5. A. P. Malvino: *Ηλεκτρονική*, Εκδόσεις Τζιόλα 2001
 6. A. Barna, D. I. Porat, *Operational Amplifiers*, 2nd edition, John Wiley and Sons, 1989
 7. <http://ccreweb.org/documents/physics/chaos/vdp2006.html>
 8. E. V. Appleton and B. van der Pol, On a type of oscillation-hysteresis in a simple triode generator, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science Ser.6*, 43, 177-193, 1922.
 9. B. van der Pol, Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance (reception with reactive triode), *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science Ser.7*, 3, 65-80, 1927.
 10. B. van der Pol and J. van der Mark, The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science Ser.7*, 6, 763-775, 1928.
 11. B. van der Pol, The nonlinear theory of electric oscillations, *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, 22, 1051-1086, 1934.
 12. M. L. Cartwright and J. E. Littlewood, On non-linear differential equations of the second order: I. The equation $\ddot{y} - k(1 - y^2)\dot{y} + y = b\lambda k \cos(\lambda t + a)$; k large, *Journal of the London Mathematical Society*, 20, 180-189, 1945.
12. Global bifurcations of periodic orbits in the forced van der Pol equation.

Guckenheimer, John; Hoffman, Kathleen; Weckesser, Warren
Global analysis of dynamical systems, 261--276, Inst. Phys., Bristol,
2001, MathSciNet.

13. The periodic solution of van der Pol's equation.

Buonomo, A.

SIAM J. Appl. Math. 59 (1999), no. 1, 156--171 (electronic),
MathSciNet.

14. Chaos of the relativistic parametrically forced van der Pol
oscillator

Ashkenazy Y.; Goren C.; Horwitz L.P.

Physics Letters A, 29 June 1998, vol. 243, no. 4, pp. 195-204(10),
MathSciNet.

15. Bifurcation and chaos in the double-well Duffing-van der Pol
oscillator: numerical and analytical studies.

Venkatesan, A.; Lakshmanan, M.

Phys. Rev. E (3) 56 (1997), no. 6, 6321--6330, MathSciNet.

16. Limit cycles of cubic van der Pol equation with one finite critical
point.

Guo, Lin; Chen, Guowei

Ann. Differential Equations 13 (1997), no. 2, 125--139, MathSciNet.

17. [The Role of Poincare-Andronov-Hopf Bifurcations in the
Application of Variable-Coefficient Harmonic Balance to Periodically
Forced Nonlinear Oscillators](#)

J. L. Summers, J. Brindley, P. H. Gaskell, M. D. Savage

Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering
Sciences, Vol. 354, No. 1704. (Jan. 15, 1996), pp. 143-168, Jstor.

18. [The Moving Singularities of the Perturbation Expansion of the
Classical Kepler Problem](#)

Mohammad Tajdari

SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 56, No. 5. (Oct., 1996), pp.
1363-1378, Jstor.

19. [A Phase-Plane Analysis of Bursting in the Three-Dimensional
Bonhoeffer-Van Der Pol Equations](#)

Son T. Tu

SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 49, No. 2. (Apr., 1989), pp.
331-343, Jstor.

ΣΠΑΡΤΗ 2010

