

2011

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΥ ΕΛΕΝΗ ΑΜ 2006126

ΘΑΝΑΣΙΑΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΑΜ 2006152

ΘΕΜΑ:

**ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ
ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ Van der Pol
ΜΕ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΔΙΕΓΕΡΤΗ**

**Α.Τ.Ε.Ι ΚΑΛΑΜΑΤΑΣ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΠΑΡΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ &
ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ**

**ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ : Π. ΒΥΡΙΔΗΣ
Γ. ΛΙΑΠΕΡΔΟΣ**

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2011



2011

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΥ ΕΛΕΝΗ ΑΜ 2006126

ΘΑΝΑΣΙΑΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΑΜ 2006152

ΘΕΜΑ:

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ
ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ Van der Pol
ΜΕ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΔΙΕΓΕΡΤΗ

Α.Τ.Ε.Ι ΚΑΛΑΜΑΤΑΣ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΠΑΡΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ &
ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ : Π. ΒΥΡΙΔΗΣ
Γ. ΛΙΑΠΕΡΔΟΣ

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2011



ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία έχει σαν σκοπό τη σχεδίαση τη θεωρητική μελέτη και την προσομοίωση ενός κυκλώματος και πιο συγκεκριμένα ενός ταλαντωτή τύπου Van der Pol με εξωτερικό περιοδικό διεγέρτη. Το χαρακτηριστικό ενός τέτοιου ταλαντωτή είναι η λεγόμενη «μη γραμμικότητα». Θα μπορούσε εντούτοις η περιγραφή ενός τέτοιου μοντέλου να εκπληρώσει και εκπαιδευτικούς στόχους ενός μαθήματος ηλεκτρονικής, αφενός ως αντιπαράδειγμα στη γραμμικότητα (συνήθως τα μοντέλα αυτού του μαθήματος είναι γραμμικά) αφετέρου ως πρότυπο πολλών τεχνολογικών εφαρμογών.

Η εργασία αποτελείται κυρίως από δύο βασικά μέρη: στην μαθηματική ανάλυση του ταλαντωτή και στην σχεδίαση του κυκλώματος με την εξαγωγή της περίφημης εξίσωσης Van der Pol σε περιβάλλον multisim. Η μαθηματική ανάλυση επικεντρώνετε κυρίως στους τρεις βασικούς συντονισμούς του, τον θεμελιώδη, τον υπαρμονικός και τον υπεραρμονικός, όπως επίσης και στην προσεγγιστική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης Van der Pol με περιοδική διέγερση. Το θεωρητικό μέρος είναι αρκετά επεκτεταμένο από μαθηματικής άποψης, γεγονός είναι όμως πως για την κατανόησή του απαιτούνται απλές γνώσεις Ανάλυσης και Γραμμικής Άλγεβρας, οι οποίες συνήθως διδάσκονται στα πρώτα εξάμηνα σπουδών των Τεχνολογικών Ιδρυμάτων. Η μέθοδος εισάγεται σύμφωνα με τη φυσική διαίσθηση και αποφεύγεται η αυστηρή διατύπωση. Τα δύο μέρη αυτά πλαισιώνονται από μία εισαγωγή, σκοπός της οποίας είναι μια ιστορική αναδρομή και η ανάλυση των μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων όπως η εξίσωση Van der Pol όπως επίσης και το φαινόμενο του συντονισμού και αναφέρονται και κάποια παραδείγματα κυκλωμάτων.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους επιβλέποντες κ.Βυριδή Παναγιώτη και κ. Λιαπέρδο Ιωάννη. Η εργασία αυτή ολοκληρώθηκε βασισμένη στην εμπιστοσύνη, στην καθοδήγηση και στην άριστη συνεργασία τους μαζί μου

Σπάρτη 23/02 /2011

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	
1.1 ΓΕΝΙΚΑ ΚΑΙ ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ	ΣΕΛ. 4
1.2 ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΤΑΛΑΝΤΩΤΕΣ ΜΕ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΤΟΥ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ	ΣΕΛ. 6
1.3 ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ Van der Pol	
1.3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	ΣΕΛ.10
1.3.2 ΚΥΚΛΩΜΑ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ VAN DER POL	ΣΕΛ.13
2 ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ VAN DER POL ΜΕ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ	
2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	ΣΕΛ.18
2.2 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΚΟΝΤΑ ΣΤΟ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟ	ΣΕΛ.19
2.3 ΛΥΣΗ ΚΟΝΤΑ ΣΤΟΥΣ ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΕΣ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥΣ	
	ΣΕΛ.28
2.3.1 ΛΥΣΗ ΚΟΝΤΑ ΣΤΟΝ ΥΦΑΡΜΟΝΙΚΟ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟ	
	ΣΕΛ.30
2.3.2 ΛΥΣΗ ΚΟΝΤΑ ΣΤΟΝ ΥΠΕΡΑΡΜΟΝΙΚΟ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟ	
	ΣΕΛ.35
2.4 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΜΑΚΡΥΑ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥΣ	ΣΕΛ.39
3. VAN DER POL ΣΤΟ MULTISIM	ΣΕΛ.46
4. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	
4.1 ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ	ΣΕΛ.50
4.2 ΥΦΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ	ΣΕΛ.51
4.3 ΥΠΕΡΑΡΜΟΝΙΚΟ	ΣΕΛ.52
5. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	ΣΕΛ.56

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 ΓΕΝΙΚΑ ΚΑΙ ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Η σχέση των Διαφορικών Εξισώσεων με την ποσοτική μελέτη της φύσης είναι σίγουρα κάτι παραπάνω από προφανές. Ο πρώτος πραγματικός νόμος της Φυσικής, δηλαδή ο νόμος του Νεύτωνα, ήταν και η πρώτη Διαφορική Εξίσωση στην Ιστορία. Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι αρχικές συνθήκες είναι το μοναδικό σημείο, που τα πειραματικά δεδομένα υπεισέρχονται στο μαθηματικό πρόβλημα, το σημείο δηλαδή όπου η εμπειρία συναντάται με τη μαθηματική επεξεργασία. Η σύγχρονη μοντελοποίηση έχει ένα βασικό μεθοδολογικό χαρακτηριστικό: διατυπώνονται μεταβολικές αρχές σε χρονικές στιγμές που διαφέρουν απειροστά. Με αυτόν τον τρόπο οι νόμοι περιλαμβάνουν ρυθμούς μεταβολής, οπότε αναπαρίστανται από Διαφορικές Εξισώσεις.

Στην ανάπτυξη της θεωρίας των Διαφορικών Εξισώσεων έχουν εμφανιστεί κυρίως δύο τάσεις. Η πρώτη και παλαιότερη χαρακτηρίζεται από τις προσπάθειες εύρεσης λύσεων σε κλειστή μορφή (τύπο) . Στη δεύτερη εγκαταλείπεται κάθε ελπίδα επίλυσης με οποιονδήποτε παραδοσιακό – αναλυτικό τρόπο και το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στην αναζήτηση ποιοτικών πληροφοριών και γενική συμπεριφορά των λύσεων, στην αριθμητική επίλυση με χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή και στη προσεγγιστική επίλυση με μεθόδους διαταραχών. Βεβαίως οι διαφορικές εξισώσεις που λύνονται αναλυτικά αποτελούν εξαίρεση και είναι κυρίως οι γνωστές γραμμικές. Οι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, που θεωρούνται και ακριβέστερα μοντέλα της φυσικής πραγματικότητας, αποτελούν αντικείμενα μελέτης της δεύτερης και πιο σύγχρονης τάσης.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η υλοποίηση ενός ηλεκτρικού ταλαντωτή, ο οποίος περιγράφεται από μία εξίσωση της μορφής:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \mu(u^2 - 1) \frac{du}{dt} + u = U_0 \sin(\Omega t) \quad (1)$$

Η (1) ονομάζεται εξίσωση Van der Pol, είναι προφανώς μη γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως και περιγράφει μια ταλάντωση με περιοδική εξωτερική διέγερση πλάτους U_0 . Η συνάρτηση $u(t)$ εκφράζει την τάση ως συνάρτηση του χρόνου, όπως θα δούμε στη υλοποίηση του ταλαντωτή. Ο συντελεστής της πρώτης παραγώγου u' εκφράζει εκ πρώτης ένα είδος μίας μη γραμμικής απόσβεσης με συντελεστή $\mu > 0$. Ο ταλαντωτής Van der Pol αρχικά «ανακαλύφθηκε» από τον Ολλανδό ηλεκτρολόγο μηχανικό και φυσικό Balthasar Van der Pol. Ο Van der Pol βρήκε τις τελικά σταθερές ταλαντώσεις, γνωστές σήμερα ως οριακοί κύκλοι [3, 4, 11], μέσω ηλεκτρικών κυκλωμάτων και κενών σωλήνων. Η εξίσωση Van der Pol έχει μια μακρά ιστορία μελέτης. Χρησιμοποιείται τόσο στις φυσικές όσο και στις βιολογικές επιστήμες. Για παράδειγμα, στη βιολογία οι Fitzhugh και Nagumo, πρότειναν την εξίσωση αυτή ως πρότυπο για τις δυνατότητες δράσης των νευρώνων. Η εξίσωση έχει επίσης χρησιμοποιηθεί και στη Σεισμολογία για μοντέλο ταλάντωσης δύο λιθοσφαιρικών πλακών κοντά σε ένα γεωλογικό ρήγμα.



Ο Balthasar Van der Pol (27/01/1889 – 06/10/1959) γεννήθηκε στην Ουτρέχτη και ήταν Ολλανδός φυσικός Van der Pol σπούδασε φυσική στο πανεπιστήμιο της Ουτρέχτη², και το 1920 του απονεμήθηκε το διδακτορικό του (PhD). Σπούδασε πειραματική φυσική με τον John Ambrose Fleming και τον Sir J.J. Thomson στην Αγγλία. Εντάχθηκε στα ερευνητικά εργαστήρια της Philips το 1921, όπου εργάστηκε μέχρι τη συνταξιοδότησή του το 1949. Τα κύρια επιστημονικά του ενδιαφέροντα ήταν η διάδοση ραδιοκυμάτων, η θεωρία των ηλεκτρικών κυκλωμάτων, και η

Εικόνα 1.1 μαθηματική φυσική. Τιμήθηκε με το μετάλλιο της τιμής από το Institute of Radio Engineers, την σημερινή IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) το 1935. Δόθηκε στον αστεροειδή 10443 το όνομά του όπως και στον ταλαντωτή Van der Pol (που θα μελετήσουμε στη περίπτωση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης).

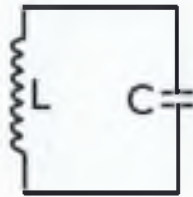
Η προσεγγιστική επίλυση της (1) με μία από της μεθόδους των διαταραχών [3, 5] οδηγεί σε ένα χαρακτηριστικό ενός μη γραμμικού ταλαντωτή με περιοδική εξωτερική διέγερση, το οποίο διαφέρει σημαντικά από αυτό των αντίστοιχων γραμμικών: το φαινόμενο του συντονισμού.

1.2 ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΤΑΛΑΝΤΩΤΕΣ ΜΕ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΤΟΥ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ

Πριν προχωρήσουμε στην υλοποίηση του κυκλώματος και τη μελέτη της εξίσωσης (1) παραθέτουμε ένα παράδειγμα από τη θεωρία των ηλεκτρικών κυκλωμάτων τύπου LC και RLC με εξωτερική περιοδική διέγερση. Τα μοντέλα τέτοιων κυκλωμάτων περιγράφονται από γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Οι κλασσικές λύσεις αυτών διασαφηνίζουν το φαινόμενο του συντονισμού.

Θεωρούμε πρώτα ένα κύκλωμα με πηνίο L και πυκνωτή C με εξωτερική επιβεβλημένη τάση της μορφής:

$$E(t) = E_0 \sin(\Omega t) \quad (2)$$



Εικόνα 1.2

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Kirchhoff λαμβάνουμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης ως προς το φορτίο:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = E_0 \sin(\Omega t) \quad (3)$$

όπου $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ η ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή και Ω η συχνότητα του εξωτερικού διεγέρτη. Η γενική λύση της (3) δίνεται από την

$$q(t) = K_1 \cos(\omega_0 t) + K_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{E_0}{L(\omega_0^2 - \Omega^2)} \sin(\Omega t) \quad (4)$$

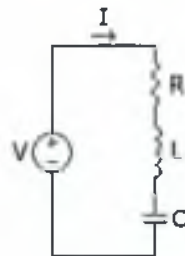
Οι σταθερές K_1 και K_2 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Κατά το συντονισμό, η συχνότητα του εξωτερικού διεγέρτη πλησιάζει την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή. Στην οριακή περίπτωση όπου

$$\Omega = \omega_0 \quad (5)$$

από τη λύση (4) φαίνεται ότι το πλάτος απειρίζεται. Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει απόσβεση (αμελητέα αντίσταση).

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα κύκλωμα με αντίσταση R , πηνίο L και πυκνωτή C . Επιβάλλοντας μία εξωτερική διέγερση (2) από το νόμο του Kirchhoff λαμβάνουμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης ως προς το φορτίο:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E_0 \sin(\Omega t) \quad (6)$$



Εικόνα 1.3

όπου $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ η ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή, Ω η συχνότητα του εξωτερικού διεγέρτη και $\gamma = R/(2L)$ ο συντελεστής απόσβεσης. Στην περίπτωση της ασθενούς απόσβεσης, δηλαδή όταν

$$\gamma < \omega_0 \quad \text{ή} \quad R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

η λύση της (6) δίνεται από την

$$q(t) = e^{-\gamma t} [K_1 \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t) + K_2 \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t)] + \frac{E_0}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}} \sin(\Omega t + \varphi)$$

με

$$\tan \varphi = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} .$$

Στη μόνιμη κατάσταση θα είναι:

$$q_{\infty}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = \frac{E_0}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}} \sin(\Omega t + \varphi) \quad (7)$$

Κατά την οριακή τιμή (5) στη μόνιμη κατάσταση έχουμε

$$q_{\infty}(t) = \frac{E_0}{2L\gamma\omega_0} \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (8)$$

Δηλαδή στην περίπτωση της ύπαρξης απόσβεσης έχουμε μεγιστοποίηση του πλάτους, αλλά όχι απειρισμό.

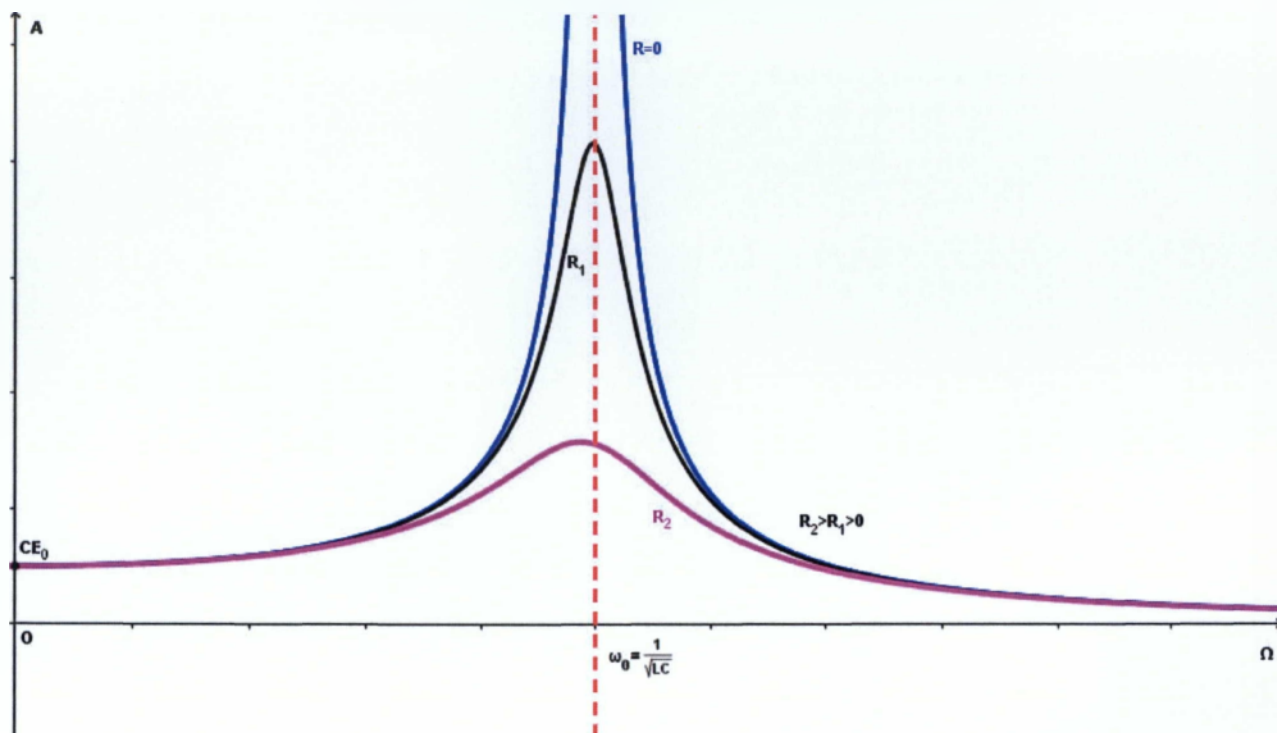
Παριστάνουμε γραφικά τις σχέσεις πλάτους - συχνότητας:

$$A(\Omega) = \frac{E_0}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}} , \quad R \neq 0 \quad (9\alpha)$$

και

$$A(\Omega) = \frac{E_0}{L(\omega_0^2 - \Omega^2)} , \quad R = 0$$

(9β)



Εικόνα 1.4 Σχέση συχνότητας – πλάτους στους γραμμικούς ταλαντωτές με εξωτερική περιοδική διέγερση. Συντονισμό έχουμε όταν $\Omega = \omega_0$.

Το φαινόμενο του συντονισμού είναι πιο πολύπλοκο στην περίπτωση της (1). Με μια πρώτη ματιά συντονισμό έχουμε όταν $\Omega = 1$, οπότε αναμένουμε μεγιστοποίηση του πλάτους. Εδώ πρέπει να σημειώσουμε πως οι μη γραμμικοί όροι γενικότερα λειτουργούν σαν όροι απόσβεσης, (ανεξαρτήτως της μορφής της μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης) και συνεπώς στην περίπτωση του συντονισμού δεν έχουμε ποτέ απειρισμό του πλάτους της ταλάντωσης (από αυτήν την άποψη ευτυχώς που υπάρχουν οι μη γραμμικότητες!). Η μαθηματική επεξεργασία όμως της (1) προς εύρεση μιας προσεγγιστικής λύσης αποκαλύπτει και άλλους συντονισμούς, οι οποίοι καλούνται δευτερεύοντες και οφείλονται στη μη γραμμικότητα [2] της διαφορικής εξίσωσης (1). Επομένως και σε αυτές τις περιπτώσεις παρατηρείται μεγιστοποίηση του πλάτους, με διαφορετικό νόμο από αυτή του συνηθούς συντονισμού. Έτσι θα προσπαθήσουμε να εξαγάγουμε παρόμοιες με την (9) σχέσεις πλάτους – συχνότητας στους διάφορους συντονισμούς στη μόνιμη κατάσταση.

Η μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε για την προσεγγιστική επίλυση της (1) είναι αυτή των πολλαπλών βαθμίδων του χρόνου [2, 3, 5], όπως αυτή περιγράφεται και εφαρμόζεται στην [11]. Πράγματι στην αδιάστατη εξίσωση (1) ανακλιμακώνοντας τη σταθερά

$$\mu = \varepsilon \alpha^2$$

με $0 < \varepsilon \ll 1$ ικανοποιητικά μικρό. Τότε με ανακλιμάκωση του χρόνου στη μορφή

$$t_n = \varepsilon^n t, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

έχουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς συναρτήσεων

$$u(t) = u(t_0, t_1, \dots, t_n, \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(t_0, t_1, \dots, t_n, \dots)$$

η οποία επιτρέπει να αναζητήσουμε μία λύση της (1) σε ένα ανάπτυγμα τύπου Taylor της μορφής:

$$u(t) = u(t_0, t_1) = u_0(t_0, t_1) + \varepsilon u_1(t_0, t_1) + O(\varepsilon^2)$$

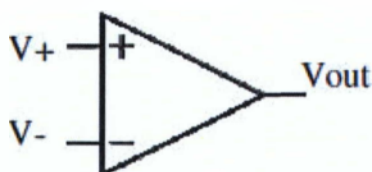
με την $u_1(t_0, t_1)$ να είναι η διαταραχή της $u_0(t_0, t_1)$.

1.3 ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ Van der Pol

1.3.1 ΤΕΛΕΣΤΙΚΟΙ ΕΝΙΣΧΥΤΕΣ

Για την προσομοίωση του ταλαντωτή θα χρησιμοποιήσουμε μερικές βασικές δομικές μονάδες :

- Τελεστικός Ενισχυτής



Εικόνα 1.5

Πρόκειται για ολοκληρωμένο κύκλωμα δύο εισόδων (+ και -) και μιας εξόδου. Λειτουργεί ως διαφορικός ενισχυτής τάσης, δηλαδή $V_{out} = A \cdot (V_+ - V_-)$ όπου A η απολαβή τάσης. Στην ιδανική περίπτωση η απολαβή A είναι άπειρη. Αν η διαφορική τάση εισόδου $(V_- - V_+)$ είναι πεπερασμένη, και δεδομένου πως $A \rightarrow \infty$ τότε και $V_- \rightarrow \infty$. Επειδή κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατό σε ένα πραγματικό κύκλωμα, είναι φανερό πως, προκειμένου η τάση εξόδου να είναι πεπερασμένη, θα πρέπει $(V_+ - V_-) \rightarrow 0$. Εκ κατασκευής του τελεστικού ενισχυτή η αντίσταση εισόδου είναι άπειρη (οι εισοδοί του, δηλαδή, απορροφούν πρακτικά μηδενικό ρεύμα), ενώ η αντίσταση εξόδου του είναι σχεδόν μηδενική.

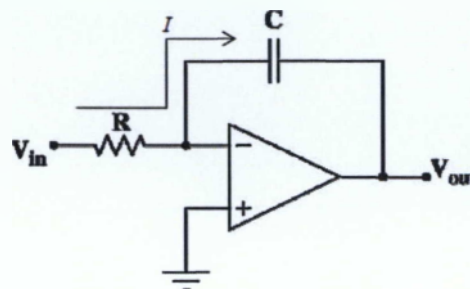
➤ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΗΣ ΜΕ ΤΗΛΕΣΤΙΚΟ ΕΝΙΣΧΥΤΗ

Θα αποδείξουμε ότι η έξοδος του κυκλώματος του σχήματος είναι ανάλογη του ολοκληρώματος του σήματος εισόδου:

$$C = \frac{dq}{dV} \Rightarrow CdV = dq \Rightarrow C \frac{dV}{dt} = \frac{dq}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C \frac{dV_{out}}{dt} = -I \Rightarrow C \frac{dV_{out}}{dt} = -\frac{V_{in}}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{in} dt = -RC dV_{out} \Rightarrow \int V_{in} dt = -RC V_{out} \Rightarrow$$



Εικόνα 1.6

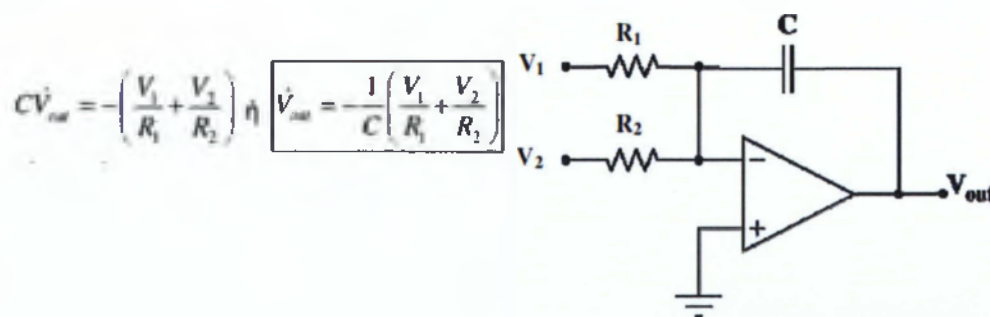
$$\Rightarrow V_{out} = -\frac{1}{RC} \int V_{in} dt .$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τη διαφορική σχέση εξόδου – εισόδου:

$$C \frac{dV_{out}}{dt} = -\frac{V_{in}}{R} \quad \text{ή} \quad CV_{out}^{\dot{}} = -\frac{V_{in}}{R} \quad \text{ή} \quad \boxed{V_{out}^{\dot{}} = -\frac{V_{in}}{RC}}$$

➤ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΗΣ ΔΥΟ ΤΑΣΕΩΝ ΜΕ ΤΗΛΕΣΤΙΚΟ ΕΝΙΣΧΥΤΗ

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται πως για το κύκλωμα του σχήματος η σχέση εξόδου - εισόδων περιγράφεται από την εξίσωση:

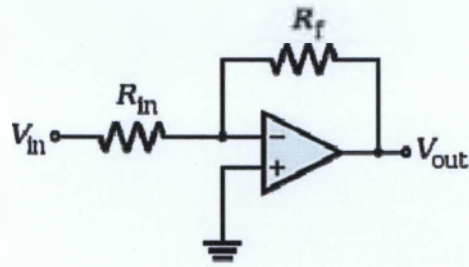


Εικόνα 1.7

➤ ΑΝΑΣΤΡΕΦΩΝ ΕΝΙΣΧΥΤΗΣ ΤΑΣΗΣ ΜΕ ΤΗΛΕΣΤΙΚΟ ΕΝΙΣΧΥΤΗ

Για το κύκλωμα του σχήματος μπορεί εύκολα να αποδειχθεί η σχέση:

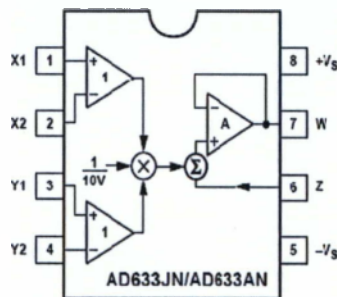
$$V_{out} = -\frac{R_f}{R_{in}} V_{in}$$



Εικόνα 1.8

➤ ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΟ AD633

Απολύτως απαραίτητο για την εμφάνιση μη γραμμικής συμπεριφοράς, το κύκλωμα τετραγωνισμού μπορεί να υλοποιηθεί με τη βοήθεια του ολοκληρωμένου AD633



Εικόνα 1.9

Γενικά, υλοποιεί τη συνάρτηση

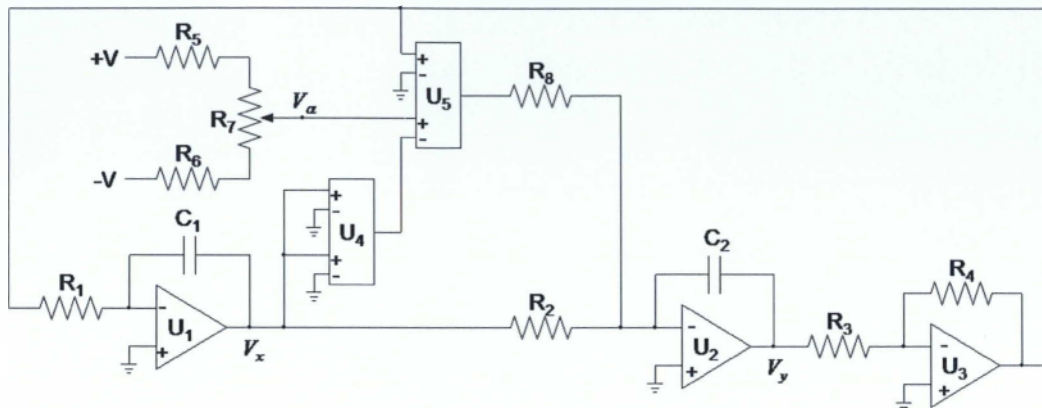
$$\frac{(X_1 - X_2) \cdot (Y_1 - Y_2)}{10[V]} + Z \quad (*)$$

$$\text{ή αν } Z=0 \text{ την } \frac{(X_1 - X_2) \cdot (Y_1 - Y_2)}{10[V]} \quad (*)$$

(*): [V] = Volts

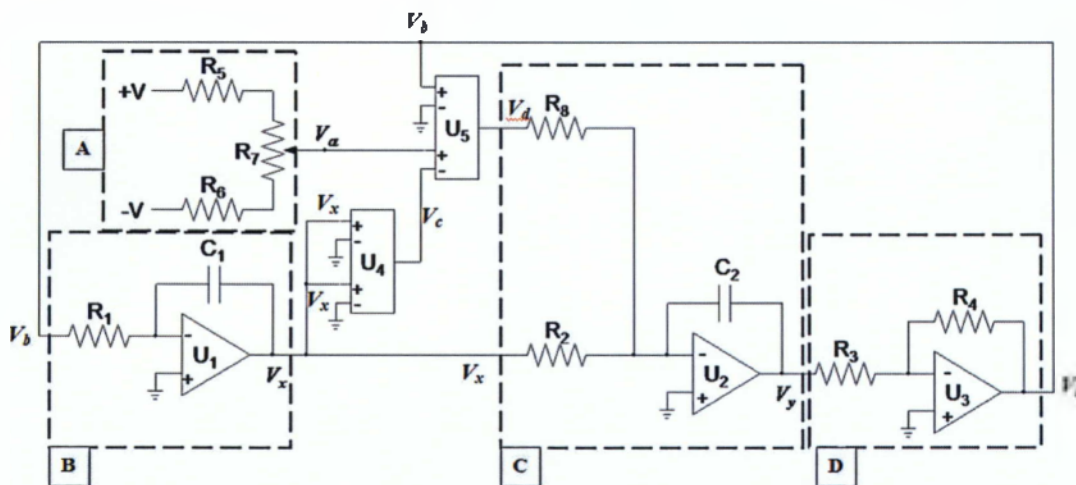
1.3.2 ΚΥΚΛΩΜΑ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ VAN DER POL

Θα αποδείξουμε ότι το κύκλωμα του Σχήματος υλοποιεί έναν ταλαντωτή Van der Pol.



Εικόνα 1.10

Το κύκλωμα αποτελείται από τις πιο κάτω βαθμίδες:



Εικόνα 1.11

όπου

- A: Διαρέτης τάσης: Παράγει την τάση V_a .
- B: Ολοκληρωτής (απλός)
- C: Ολοκληρωτής (δύο τάσεων)
- D: Αναστρέφων ενισχυτής

Με βάση τις σχέσεις (ii)-(iv), οι εξισώσεις για τις τάσεις κάθε βαθμίδας έχουν ως εξής:

B:

$$\dot{V}_x = -\frac{1}{R_1 C_1} V_b \quad (1)$$

C:

$$\dot{V}_y = -\frac{1}{C_2} \left(\frac{V_x}{R_2} + \frac{V_d}{R_8} \right) \quad (2)$$

D:

$$V_b = -\frac{R_4}{R_3} V_y \quad (3)$$

U4:

$$V_c = \frac{1}{10[V]} V_x^2 \quad (4)$$

U5:

$$V_d = \frac{V_b (V_a - V_c)}{10[V]} \quad (5)$$

Από τις (1) και (3) προκύπτει:

$$\dot{V}_x = \frac{R_4}{R_1 R_3 C_1} V_y \quad (6)$$

Εάν $R_1=R_2=R_3=R_4=R$ και $C_1=C_2=C$, τότε:

η (6) γράφεται:

$$\dot{V}_x = \frac{1}{RC} V_y \quad \text{ή} \quad RC\dot{V}_x = V_y \quad (6^a)$$

η (2) γράφεται:

$$\dot{V}_y = -\frac{1}{C} \left(\frac{V_x}{R} + \frac{V_d}{R_8} \right) \quad (2^a)$$

η (3) γράφεται:

$$V_b = -V_y \quad (3^a)$$

Έχουμε:

$$(2a) \stackrel{(5)}{\Rightarrow} \dot{V}_y = -\frac{1}{C} \left(\frac{V_x}{R} + \frac{V_b(V_a - V_c)}{10R_8[V]} \right) \stackrel{(3a)}{\Rightarrow}$$

$$\dot{V}_y = -\frac{1}{C} \left(\frac{V_x}{R} - \frac{V_a - V_c}{10R_8[V]} V_y \right) \stackrel{(4)}{\Rightarrow}$$

$$\dot{V}_y = -\frac{1}{C} \left(\frac{V_x}{R} - \frac{V_a - \frac{V_x^2}{10[V]}}{10R_8[V]} V_y \right) \Rightarrow$$

$$\dot{V}_y = -\frac{1}{C} \left(\frac{V_x}{R} - \frac{10V_a[V] - V_x^2}{100R_8[V]^2} V_y \right) \Rightarrow$$

$$\dot{V}_y = \frac{10V_a[V] - V_x^2}{100R_8C[V]^2} V_y - \frac{V_x}{RC} \Rightarrow$$

$$\dot{V}_y = \frac{1}{RC} \left(R \frac{10V_a[V] - V_x^2}{100R_8[V]^2} V_y - V_x \right) \Rightarrow$$

$$RC\dot{V}_y = \frac{R}{100R_8[V]^2} (10V_a[V] - V_x^2) V_y - V_x \quad (7)$$

Από τις (7) και (6^a) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
R^2 C^2 \ddot{V}_x &= \frac{R}{100 R_8 [V]^2} (10 V_a [V] - V_x^2) R C \dot{V}_x - V_x \Rightarrow \\
R^2 C^2 \ddot{V}_x &= \frac{R^2 C}{100 R_8 [V]^2} (10 V_a [V] - V_x^2) \dot{V}_x - V_x \Rightarrow \\
R^2 C^2 \ddot{V}_x - \frac{R^2 C}{100 R_8 [V]^2} (10 V_a [V] - V_x^2) \dot{V}_x + V_x &= 0 \Rightarrow \\
\ddot{V}_x - \frac{1}{100 R_8 C [V]^2} (10 V_a [V] - V_x^2) \dot{V}_x + \frac{1}{R^2 C^2} V_x &= 0 \quad (8)
\end{aligned}$$

Αν θέσουμε $\tau = \frac{t}{RC}$ τότε

$$\dot{V}_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{dV_x}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = V'_x \frac{1}{RC} \quad (9)$$

και, όμοια,

$$\ddot{V}_x = V''_x \frac{1}{R^2 C^2} \quad (10)$$

Αντικαθιστώντας τις (9) και (10) στην (8) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{V''_x}{R^2 C^2} - \frac{1}{100 R_8 C [V]^2} (10 V_a [V] - V_x^2) \frac{V'_x}{RC} + \frac{1}{R^2 C^2} V_x &= 0 \Rightarrow \\
\frac{1}{R^2 C^2} \left(V''_x - \frac{R}{100 R_8 [V]^2} (10 V_a [V] - V_x^2) V'_x + V_x \right) &= 0 \Rightarrow \\
V''_x - \frac{R}{100 R_8 [V]^2} (10 V_a [V] - V_x^2) V'_x + V_x &= 0 \quad (11)
\end{aligned}$$

Θέτοντας

$$\varepsilon = \frac{R}{100 R_8 [V]^2}, \quad \alpha^2 = 10 V_a [V] \text{ και } V_x = au \text{ η (11) παίρνει τη μορφή}$$

$$x'' + \varepsilon(a^2 x^2 - \alpha^2)x' + x = 0 \Rightarrow x'' + \varepsilon a^2(x^2 - 1)x' + x = 0$$

Θέτοντας, τελικά, $\mu = \varepsilon a^2$ η εξίσωση γίνεται:

$$\boxed{u'' + \mu(u^2 - 1)u' + u = 0} \text{ (εξίσωση Van der Pol)}$$

όπου

$$\mu = \frac{RV_a}{10R_x[V]} \text{ και } u = \frac{V_x}{\sqrt{10V_a[V]}}$$

2 ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ VAN DER POL ΜΕ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μαθηματική παράσταση της τάσης στον ταλαντωτή περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$u'' + (u^2 - 1)u' + u = U_0 \sin(\Omega\tau) \quad (1)$$

η οποία είναι δευτέρας τάξεως μη γραμμική και μη ομογενής. Η εξωτερική διέγερση (δεύτερο μέλος) είναι περιοδική με συχνότητα Ω και πλάτος U_0 , ενώ η ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι $\omega_0 = 1$ (δηλαδή ο συντελεστής του γραμμικού όρου u). Σημειώνουμε ακόμα πως η παράμετρος

$$\mu = \varepsilon a^2$$

εξαρτάται άμεσα από τα δεδομένα του κυκλώματος, ενώ έχει ρυθμιστεί έτσι ώστε η ποσότητα ε να είναι επαρκώς μικρή ($0 < \varepsilon \ll 1$ με $\varepsilon = R / (100R_g)$).

Σε αντίθεση με τους γραμμικούς ταλαντωτές με εξωτερική περιοδική διέγερση, εδώ το φαινόμενο του συντονισμού διαφέρει με την εξής έννοια: Εκτός από τον προφανή συντονισμό, όπου εδώ καλείται θεμελιώδης συντονισμός, δηλαδή $\Omega = \omega_0 = 1$ (η ιδιοσυχνότητα του συστήματος πλησιάζει την συχνότητα του διεγέρτη οπότε έχουμε μεγιστοποίηση του πλάτους), στα μη γραμμικά φαινόμενα εμφανίζεται και η περίπτωση, όπου η ποσότητα Ω / ω_0 είναι ρητός αριθμός. Τότε έχουμε πάλι μεγιστοποίηση του πλάτους της ταλάντωσης. Τέτοιου είδους συντονισμός θα λέγεται δευτερεύων (και αντίστοιχα αν Ω / ω_0 : ρητός: ο συντονισμός καλείται υπεραρμονικός, ενώ αν Ω / ω_0 : ακέραιος ο συντονισμός καλείται υφαρμονικός).

Συνεπώς ακολουθώντας τη μέθοδο διαταραχών των πολλαπλών βαθμίδων [3, 5] έχει σημασία κάθε φορά η τροποποίησή της αναλόγως αν η προσεγγιστική λύση που αναζητούμε βρίσκεται κοντά στην περιοχή κάποιου συντονισμού ή όχι. Γενικά όμως μπορούμε να πούμε τα εξής: κλιμακώνουμε το χρόνο τ :

$$T_i = \varepsilon^i \tau, \quad \varepsilon \ll 1, \quad i = 0, 1 \quad (2)$$

Δηλαδή σε έναν αργό χρόνο $T_1 = \varepsilon\tau$ και σε ένα γρήγορο χρόνο $T_0 = \tau$ και αναζητούμε λύση της (1) στην μορφή:

$$u(\tau) \equiv u(T_0, T_1) = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + O(\varepsilon^2) \quad (3)$$

όπου $u_0(T_0, T_1)$ μια λύση, η οποία “μοιάζει” με την λύση μια αντίστοιχης της (1) γραμμικής διαφορικής εξίσωσης, ενώ $u_1(T_0, T_1)$ θα είναι η διόρθωση της $u_0(T_0, T_1)$ (u_1 : διαταραχή της u_0). Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας θα έχουμε :

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}, \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} \quad (4)$$

ενώ εισάγοντας τους τελεστές :

$$D_0 = \frac{\partial}{\partial T_0}, D_1 = \frac{\partial}{\partial T_1}$$

οι σχέσεις (4) γράφονται :

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \varepsilon D_1, \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 D_1^2 \quad (5)$$

Λόγω των (5) βρίσκουμε

$$u = u_0 + \varepsilon u_1$$

$$\dot{u} = \frac{du}{d\tau} = (D_0 + \varepsilon D_1)(u_0 + \varepsilon u_1) = D_0 u_0 + \varepsilon D_0 u_1 + \varepsilon D_1 u_0 + O(\varepsilon^2) \quad (6)$$

$$\ddot{u} = \frac{d^2 u}{d\tau^2} = (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1)(u_0 + \varepsilon u_1) = D_0^2 u_0 + \varepsilon D_0^2 u_1 + 2\varepsilon D_0 D_1 u_0 + O(\varepsilon^2)$$

Οι σχέσεις (6) προκύπτουν παραλείποντας όλους τους όρους, οι οποίοι πολλαπλασιάζονται με την ποσότητα ε^n για $n \geq 2$. Με αντικατάσταση των σχέσεων (6) στην (1) η μη γραμμική διαφορική εξίσωση αναλύεται σε προσεγγιστικά συστήματα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, φυσικά ανάλογα με το είδος των λύσεων που αναζητάμε: κοντά ή μακριά από τις περιοχές των συντονισμών.

2.2 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΚΟΝΤΑ ΣΤΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟ

Εδώ θεωρούμε $\Omega = \omega_0$ ή $\Omega = 1$. Για ένα ασθενώς αποσβεννυμένο σύστημα ($\mu = \varepsilon a^2$ με ε : αρκετά μικρό) μια μικρού πλάτους εξωτερική διέγερση παράγει ταλαντώσεις μεγάλου πλάτους. Γι' αυτό θεωρούμε ότι το πλάτος U_0 της εξωτερικής διέγερσης είναι μικρό :

$$U_0 = \varepsilon K \quad (7)$$

Επιπλέον, εισάγουμε μια παράμετρο αποσυντονισμού σ (frequency detuning parameter) ώστε :

$$\Omega = 1 + \varepsilon\sigma \quad (8)$$

οπότε λόγω της (2)

$$\Omega\tau = (1 + \varepsilon\sigma)\tau = \tau + \varepsilon\sigma\tau = T_0 + \sigma T_1 \quad (9)$$

Η (1) λόγω των (7) και (9) γράφεται στη μορφή :

$$u'' + u = \varepsilon a^2 u - \varepsilon a^2 u' + \varepsilon K \sin(T_0 + \sigma T_1) \quad (10)$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (6) στη (10) και παραλείποντας όλους τους όρους, οι οποίοι πολλαπλασιάζονται με την ποσότητα ε^n για $n \geq 2$, λαμβάνουμε την ταυτότητα :

$$D_0^2 u_0 + u_0 + \varepsilon(D_0^2 u_1 + u_1) = \varepsilon[a^2 D_0 u_0 - a^2 u_0' D_0 u_0 - 2D_0 D_1 u_0 + K \sin(T_0 + \sigma T_1)] \quad (11)$$

Η (11) μπορεί να θεωρηθεί σαν ισότητα γραμμικών πολυωνύμων προς ε . Συνεπώς θα είναι κατ' ανάγκη:

$$D_0^2 u_0 + u_0 = 0 \quad (12)$$

$$D_0^2 u_1 + u_1 = a^2 D_0 u_0 - a^2 u_0' D_0 u_0 - 2D_0 D_1 u_0 + K \sin(T_0 + \sigma T_1) \quad (13)$$

Οι σχέσεις (12), (13) είναι το προσεγγιστικό σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, ισοδύναμο της (10).

Η λύση της (12) είναι :

$$u_0(T_0, T_1) = A(T_1)e^{iT_0} + \overline{A(T_1)}e^{-iT_0} = A(T_1)e^{iT_0} + cct \quad (14)$$

όπου cct σημαίνει συζυγής μιγαδικός όρος (conjugate complex term). Σημειώνουμε ότι η ποσότητα A είναι σταθερά ως προς T_0 , εξαρτάται ενδεχομένως από την μεταβλητή T_1 . Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τη (14) στο δεύτερο μέλος της (13). Πράγματι, βάσει των σχέσεων :

$$u^2 = A^2 e^{2iT_0} + \overline{A}^2 e^{-2iT_0} + 2A\overline{A}$$

$$D_0 u_0 = iA e^{iT_0} - i\overline{A} e^{-iT_0}$$

$$D_0 D_1 u_0 = iA' e^{iT_0} - \overline{A}' e^{-iT_0}$$

$$A'(T_1) = \frac{dA}{dT_1}$$

$$u^2 D_0 u_0 = iA^3 e^{3iT_0} + iA^2 \bar{A} e^{iT_0} - iA^{-3} e^{-3iT_0} + iA^2 \bar{A} e^{-iT_0}$$

$$\sin(T_0 + \sigma T_1) = \frac{1}{2i} (e^{iT_0} e^{i\sigma T_1} - e^{-iT_0} e^{-i\sigma T_1})$$

η (13) γράφεται στη μορφή :

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -ia^2 A^3 e^{3iT_0} + [ia^2 A - ia^2 A^2 \bar{A} + 2iA + \frac{1}{2} k e^{i\sigma T_1}] e^{iT_1} + cct \quad (15)$$

Ο δεύτερος πρόσθετος στο δεύτερο μέλος της (15) συντονίζεται με το πρώτο μέλος. Δεδομένου ότι αναζητούμε φραγμένες λύσεις (υπενθυμίζουμε ότι η u_1 είναι η διόρθωση της u_0 στην (3)) πρέπει να μηδενιστεί. Ένας τέτοιος όρος ονομάζεται "αιώνιος" (secular term). Προς τούτο αρκεί να μηδενίζουμε το συντελεστή του, δηλαδή :

$$2A' + a^2 A - a^2 A^2 \bar{A} - \frac{1}{2} k e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (16)$$

Η (16) είναι μια διαφορετική εξίσωση ως προς $A(T_1)$ η οποία καλείται εξίσωση διαμόρφωσης του πλάτους (amplitude modulation equation). Αναζητούμε λύσεις της (16) στη μορφή :

$$A(T_1) = \frac{1}{2} r(T_1) e^{ib(T_1)} \quad (17)$$

Όπου $r(T_1) > 0$: πλάτος και $b(T_1)$: φάση. Με βοήθεια των σχέσεων :

$$\bar{A} = \frac{1}{2} r e^{-ib}, \quad A^2 = \frac{1}{4} r^2 e^{2ib}$$

$$A' = \frac{1}{2} r' e^{ib} + \frac{i}{b} r b' e^{ib} \quad (18)$$

η (16) γράφεται στη μορφή:

$$r' + irb' + \frac{1}{2} a^2 r - \frac{1}{8} a^2 r^3 - \frac{1}{2} k e^{i(\sigma T_1 - b)} = 0 \quad (19)$$

Λόγω της τριγωνομετρικής ταυτότητας :

$$e^{i(\sigma T_1 - b)} = \cos(\sigma T_1 - b) + i \sin(\sigma T_1 - b)$$

και διαχωρίζοντας στη (19) τα πραγματικά από τα φανταστικά μέρη λαμβάνουμε το ισοδύναμο με τη (19) σύστημα διαφορικών εξισώσεων :

$$\begin{aligned} r' &= -\frac{1}{2}a^2r + \frac{1}{8}a^2r^3 + \frac{1}{2}K \cos(\sigma T_1 - b) \\ rb' &= \frac{1}{2}K \sin(\sigma T_1 - b) \end{aligned} \quad (20)$$

Το σύστημα διαφορικών εξισώσεων (20) είναι μη αυτόνομο δηλαδή εξαρτάται άμεσα από το χρόνο T_1 . Θεωρούμε το μετασχηματισμό :

$$\gamma(T_1) = \sigma T_1 - b(T_1) \quad (21)$$

επομένως

$$b' = \sigma - \gamma'$$

Με αντικατάσταση στις (20) λαμβάνουμε το αυτόνομο σύστημα :

$$\begin{aligned} r' &= -\frac{1}{2}a^2r + \frac{1}{8}a^2r^3 + \frac{1}{2}K \cos \gamma \\ r\gamma' &= r\sigma - \frac{1}{2}K \sin \gamma \end{aligned} \quad (22)$$

Αναζητούμε τις λύσεις του (22) στη μόνιμη κατάσταση, δηλαδή όταν :

$$r'(T_1) = 0 \text{ και } \gamma'(T_1) = 0$$

Τότε λαμβάνουμε το αλγεβρικό σύστημα :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}a^2r + \frac{1}{8}a^2r^3 + \frac{1}{2}K \cos \gamma &= 0 \\ r\sigma - \frac{1}{2}K \sin \gamma &= 0 \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα :

$$\frac{1}{2}a^2r - \frac{1}{8}a^2r^3 = \frac{1}{2}K \cos \gamma, \quad r\sigma = \frac{1}{2}K \sin \gamma \quad (23)$$

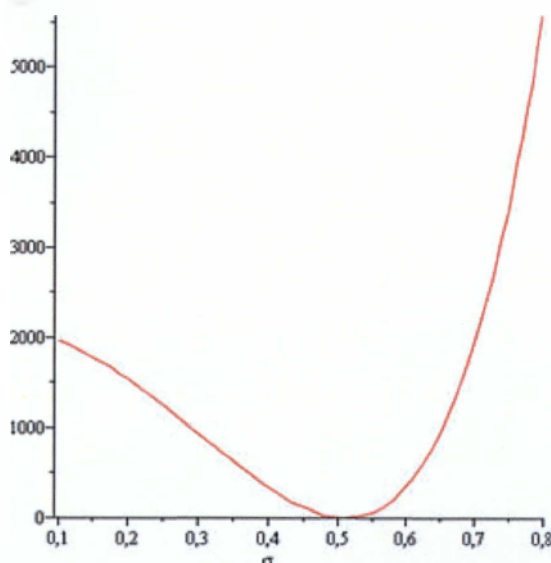
Υψώνοντας τις σχέσεις (23) στο τετράγωνο και στη συνέχεια προσθέτοντας κατά μέλη χρησιμοποιώντας την ταυτότητα :

$$\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma = 1$$

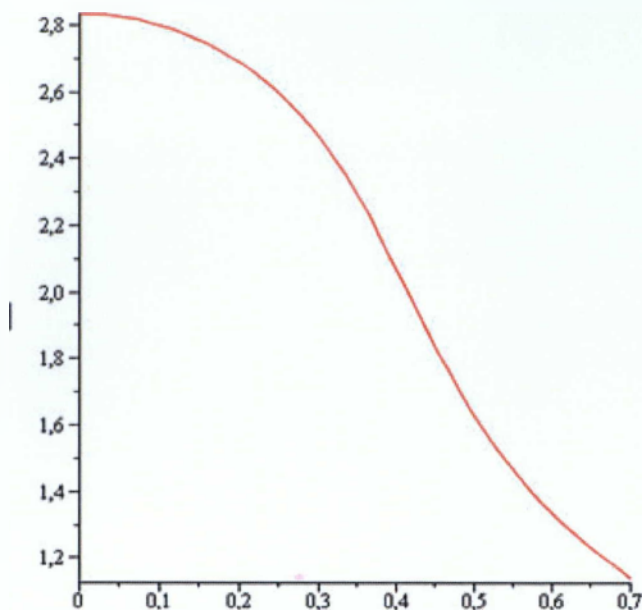
λαμβάνουμε:

$$\frac{1}{4}a^2r^2\left(1 - \frac{1}{4}r^2\right)^2 + r^2\sigma^2 - \frac{K^2}{4} = 0 \quad (24)$$

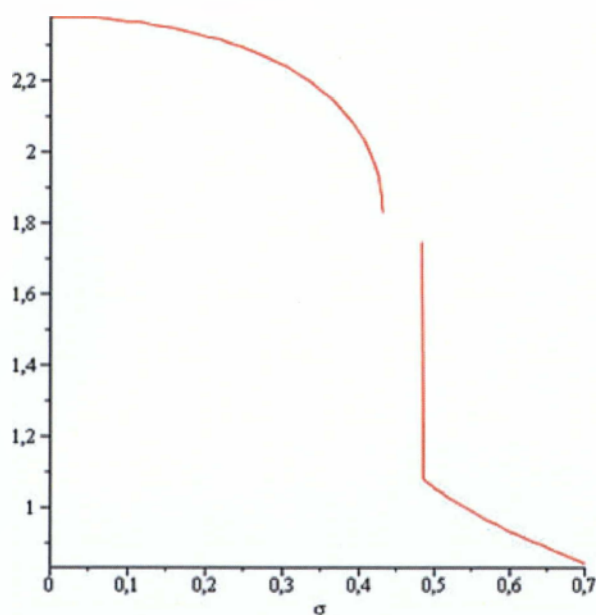
Η εξίσωση (24) είναι η σχέση πλάτους r και παραμέτρου αποσυντονισμού σ την οποία πρέπει να επιλύσουμε ως προς r . Σημειώνουμε και πάλι ότι στη μόνιμη κατάσταση το πλάτος r είναι ανεξάρτητο του χρόνου (δηλαδή r : σταθερά). Με χρήση υπολογιστή, για δεδομένα a και K κατασκευάζουμε το διάγραμμα $\sigma - r(\sigma)$ βάσει της (24).



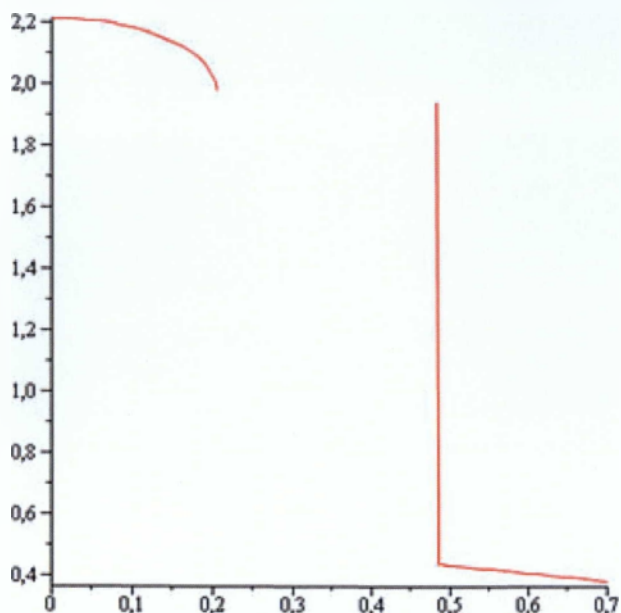
Σχ. 2.1 Αυτή είναι γραφική παράσταση της 24 αλλάζοντας τις τιμές της απόσβεσης και της εξωτερικής διέγερσης



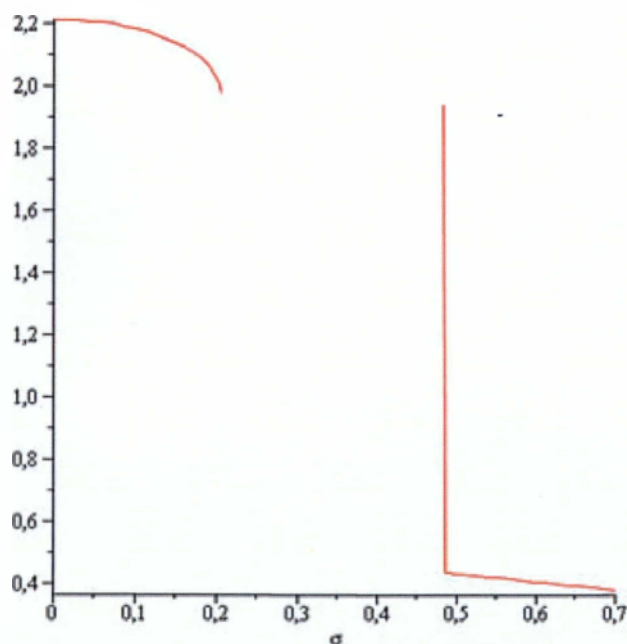
Σχ. 2.2 Γραφική παράσταση της (24) ($\sigma, a(\sigma)$) για τιμές $\kappa=1,66$, $\alpha=0,58$. Έχει μεγάλη εξωτερική διέγερση και μικρή απόσβεση



Σχ. 2.3 Γραφική παράσταση της 24 για τιμές $\kappa=1,66$, $\alpha=1,68$. Η ασυνέχεια οφείλεται σε αρνητική διακρίνουσα για αυτές τις τιμές των κ και α . Έχει μεγάλη εξωτερική διέγερση και μεγάλη απόσβεση.



Σχ. 2.4 Γραφική παράσταση της 24 (σ, a(σ)) για τιμές k=0,82, α=1,68. Η ασυνέχεια πάλι οφείλεται σε αρνητική διακρίνουσα. Έχει μικρή εξωτερική διέγερση και μεγάλη απόσβεση.



Σχ. 2.5 Γραφική παράσταση της 24 (σ, a(σ)) για τις τιμές k=0.82, α=0.34. Έχει μικρή εξωτερική διέγερση και μικρή απόσβεση.

Έστω τώρα $r_0(\sigma) > 0$ λύση της (24). Από τη δεύτερη σχέση των εξισώσεων (23) λαμβάνουμε :

$$\sin \gamma = \frac{2\sigma r_0(\sigma)}{K} \quad \text{ή} \quad \gamma = \arcsin \frac{2\sigma r_0(\sigma)}{K}$$

Λόγω του μετασχηματισμού (21) προκύπτει ότι :

$$b(T_1) = \sigma T_1 - \arcsin \frac{2\sigma r_0(\sigma)}{K}$$

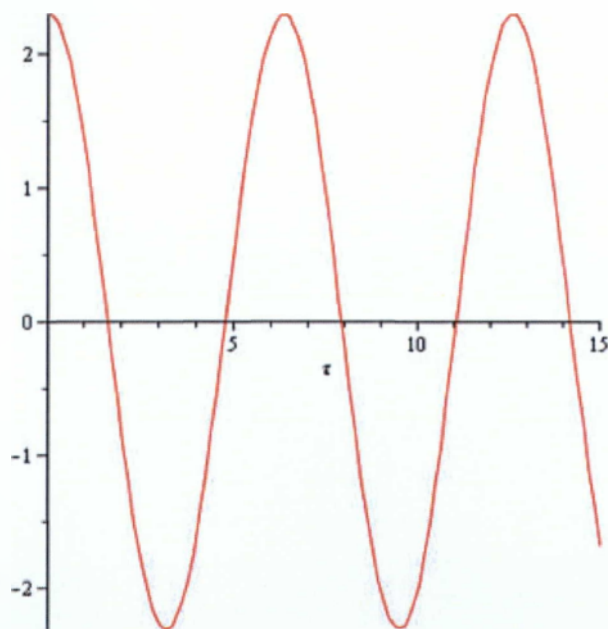
Έτσι έχουμε την ακριβή μορφή της (17) στη μόνιμη κατάσταση. Τώρα με την βοήθεια της σχέσης (14) είμαστε σε θέση να γράψουμε την προσεγγιστική λύση (3) στη μόνιμη κατάσταση, με ακρίβεια τάξης ε :

$$\begin{aligned} u(T_0, T_1) &= \frac{1}{2} r_0(\sigma) [e^{i(T_0+b(T_1))} + e^{-i(T_0+b(T_1))}] + O(\varepsilon) \\ &= r_0(\sigma) \cos(T_0 + b(T_1)) + O(\varepsilon) \\ &= r_0(\sigma) \cos(T_0 + \sigma T_1 - \arcsin \frac{2\sigma r_0(\sigma)}{K}) + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

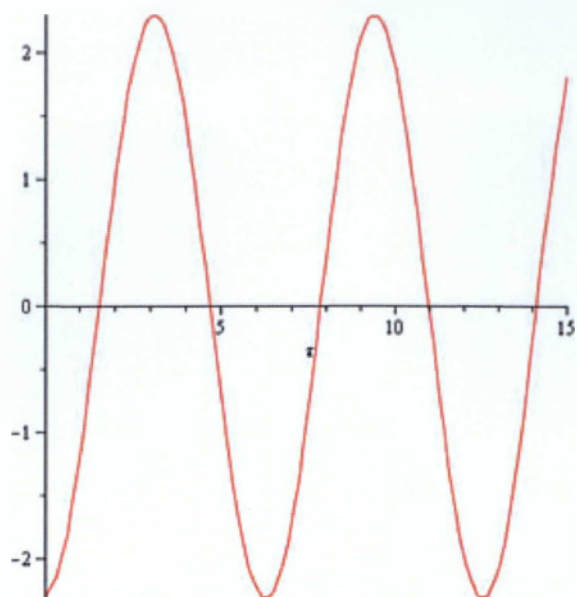
Λαμβάνονται υπ' όψιν τις σχέσεις (2) , (7) και (9) προκύπτει η τελική μορφή της λύσης :

$$u(\tau) = r_0(\sigma) \cos(\Omega \tau - \arcsin \frac{2r_0(\sigma)(\Omega-1)}{U_0}) + O(\varepsilon) \quad (25)$$

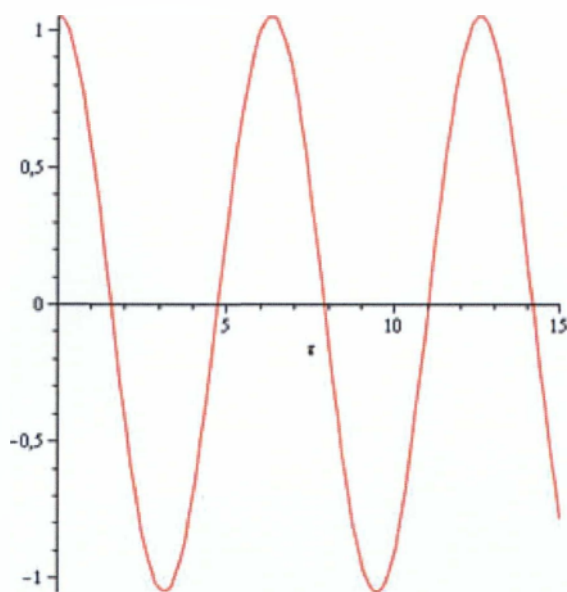
με προσέγγιση ακρίβειας ε στη μόνιμη κατάσταση για τιμές του Ω κοντά στο θεμελίωση συντονισμό.



Σχ. 2.6 Γραφική παράσταση της (25) (τ , $u(\tau)$)



Σχ. 2.7 Γραφική παράσταση της (25) $(\tau, u(\tau))$ (στη μόνιμη κατάσταση) για $\varepsilon=10^{-5}$, $\sigma=0,0175$, $\alpha=2,3$, $\kappa=1,75$ για τη μία από τις δύο θετικές ρίζες της (24)



Σχ. 2.8 Γραφική παράσταση της (25) $(\tau, u(\tau))$ στην μόνιμη κατάσταση με τα ίδια δεδομένα για την άλλη από τις δύο θετικές ρίζες της (24).

2.3 ΛΥΣΗ ΚΟΝΤΑ ΣΤΟΥΣ ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΕΣ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥΣ

Για την αναζήτηση δευτερεύοντος συντονισμού έχουμε ότι $\Omega \neq 1$ και συνεπώς η εξωτερική διέγερση μπορεί να έχει οσοδήποτε μεγάλο πλάτος. Συνεπώς με απ'

ευθείας αντικατάσταση των σχέσεων (6) στη διαφορική εξίσωση (1) και αγνοώντας τους όρους που πολλαπλασιάζονται με ε^n με $n \geq 2$ λαμβάνουμε:

$$D_0^2 u_0 + u_0 + \varepsilon(D_0^2 u_1 + 2D_0 D_1 u_0 + u_1) = \varepsilon(a^2 D_0 u_0 - a^2 u_0^2 D_0 u_0) + U_0 \sin \Omega \tau \quad (26)$$

Η (26) μπορεί να θεωρηθεί σαν ταυτότητα πρωτοβάθμιων πολυωνύμων επομένως θα είναι κατ' ανάγκη:

$$D_0^2 u_0 + u_0 = U_0 \sin \Omega T_0 \quad (27)$$

$$D_0^2 u_1 + u_1 = a^2 D_0 u_0 - a^2 u_0^2 D_0 u_0 - 2D_0 D_1 u_0 \quad (28)$$

Οι σχέσεις (27), (28) είναι προσεγγιστικό σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, ισοδύναμο της (1) στην περίπτωση $\Omega \neq 1$.

Η λύση (27) είναι

$$u_0(T_0, T_1) = A(T_1)e^{iT_0} + \overline{A(T_1)}e^{-iT_0} + \frac{U_0}{2i(1-\Omega^2)}(e^{i\Omega T_0} - e^{-i\Omega T_0}) \quad (29)$$

Θέτουμε:

$$\Lambda = \frac{U_0}{2i(1-\Omega^2)}, \quad \Omega \neq 1 \quad (30)$$

Προφανώς το Λ είναι μια φανταστική σταθερά. Τότε η σχέση (29) μπορεί να γραφτεί στη μορφή :

$$\begin{aligned} u_0(T_0, T_1) &= A(T_1)e^{iT_0} + \overline{A(T_1)}e^{-iT_0} + \Lambda e^{i\Omega T_0} - \overline{\Lambda} e^{-i\Omega T_0} \\ &= A(T_1)e^{iT_0} + \Lambda e^{i\Omega T_0} + cct \end{aligned}$$

όπου πάλι με cct συμβολίζουμε το μιγαδικό συζυγή των προηγούμενων όρων. Σημειώνουμε πάλι πως η A είναι σταθερά ως προς T_0 , ενδεχομένως όμως εξαρτάται από την μεταβλητή T_1 . Στη συνέχεια αντικαθιστούμε την (29) στο δεύτερο μέλος τη διαφορική εξίσωσης (28). Με την βοήθεια των σχέσεων :

$$D_0 u_0 = \frac{\partial u_0}{\partial T_0} = iA(T_1)e^{iT_0} + i\Omega \Lambda e^{i\Omega T_0} - i\overline{A(T_1)}e^{iT_0} - i\Omega \overline{\Lambda} e^{i\Omega T_0}$$

$$D_0 D_1 u_0 = \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} = iA'(T_1)e^{iT_0} - i\overline{A'(T_1)}e^{iT_0}, A'(T_1) = \frac{dA}{dT_1}$$

$$u_0^2 = A^2 e^{2iT_0} \Lambda^2 e^{2i\Omega T_0} + 2A\Lambda e^{i(1+\Omega)T_0} + A^{-2} e^{-2iT_0}$$

$$+\Lambda^{-2} e^{-2i\Omega T_0} + 2A\overline{\Lambda} e^{i(1+\Omega)T_0} + 2\overline{A} + 2A\overline{\Lambda} e^{i(1-\Omega)T_0} + 2\overline{A}\Lambda e^{i(\Omega-1)T_0} + 2\Lambda\overline{\Lambda}$$

η (28) γράφεται με την μορφή :

$$\begin{aligned} D_0^2 u_1 + u_1 = & ia^2 A e^{iT_0} - 2iA' e^{iT_0} - 2ia^2 A^2 \overline{A} e^{iT_0} \\ & - 2ia^2 A \Lambda \overline{\Lambda} e^{iT_0} - ia^2 \Omega \Lambda^3 e^{3i\Omega T_0} - ia^2 \Omega \overline{A}^2 \Lambda e^{i(\Omega-2)T_0} \\ & - 2ia^2 A \Lambda \overline{\Lambda} e^{iT_0} + 2ia^2 \overline{A}^2 \Lambda e^{i(\Omega-2)T_0} + ia^2 \Omega A \Lambda \overline{\Lambda} e^{iT_0} \\ & + hht + nrt + cct \end{aligned} \quad (31)$$

όπου

hht: ανώτεροι αρμονικοί όροι (higher harmonic terms)

nrt : μη συντονιζόμενοι όροι (non resonance terms)

cct: συζυγείς μιγαδικοί όροι όλων των προηγούμενων (conjugate complex terms)

Παρατηρούμε τώρα ότι στη διαφορική εξίσωση (31) οι όροι με κόκκινο στο δεύτερο μέλος πάντοτε συντονίζονται με το πρώτο, οι όροι με το πράσινο συντονίζονται με το πρώτο μέλος όταν $\Omega=3$ ενώ οι όροι με το μπλε συντονίζονται με το πρώτο μέλος όταν $\Omega=1/3$. Δηλαδή η (31) αποκαλύπτει δυο είδη συντονισμών:

$\Omega = 3$ (ή $\frac{\Omega}{\omega_0} = 3$ με $\omega_0 = 1$) : υπαρμονικός συντονισμός

$\Omega = \frac{1}{3}$ (ή $\frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{1}{3}$ με $\omega_0 = 1$) : υπεραρμονικός συντονισμός

Ανάλογα με το είδος συντονισμού μηδενίζοντας τους "αιώνιους" όρους (secular terms) κατασκευάζουμε την διαφορική εξίσωση διαμόρφωσης του πλάτους (υπενθυμίζουμε ότι η u_1 είναι πάντοτε φραγμένη και κατά μέτρο πολύ μικρότερη από την u_0).

2.3.1 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΚΟΝΤΑ ΣΤΟΝ ΥΦΑΡΜΟΝΙΚΟ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟ

Εισάγουμε παράμετρο αποσυντονισμού σ έτσι ώστε

$$\Omega = 3 + \varepsilon\sigma \quad (32)$$

όπου ε αρκετά μικρό (από τα δεδομένα του κυκλώματος $\varepsilon = R/100R_0$). Τότε :

$$\Omega\tau = \Omega T_0 = (3 + \varepsilon\sigma)\tau = \varepsilon T_0 + \sigma T_1$$

Συνεπώς στην περίπτωση αυτή η διαφορική εξίσωση διαμόρφωσης θα είναι :

$$[a^2 A - 2A' - 2a^2 A^2 \bar{A} - 4a^2 A |\Lambda|^2 + 2a^2 \Omega A |\Lambda|^2 + 2a^2 \bar{A}^2 \Lambda e^{i\sigma T_1} - a^2 \Omega \bar{A}^2 \Lambda e^{i\sigma T_1}] e^{iT_0} = 0$$

απ' όπου ισοδύναμα προκύπτει :

$$2A' - 2a^2 A + 2a^2 A^2 \bar{A} + 2a^2 A |\Lambda|^2 (1 - \Omega) - a^2 \bar{A}^2 \Lambda (2 - \Omega) e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (33)$$

με $|\Lambda|^2 = \Lambda \bar{\Lambda}$.

Αναζητούμε λύσεις της (33) στη μορφή (17). Με την βοήθεια των σχέσεων (18) η εξίσωση (33) λαμβάνει την μορφή :

$$r' + irb' - \frac{1}{2}a^2 r + \frac{1}{4}a^2 r^3 + a^2 r |\Lambda|^2 (1 - \Omega) - \frac{1}{4}a^2 r \Lambda (2 - \Omega) e^{i(\sigma T_1 - 3b)} = 0 \quad (34)$$

Κάνοντας χρήση της ταυτότητας :

$$e^{i(\sigma T_1 - 3b)} = \cos(\sigma T_1 - 3b) + i \sin(\sigma T_1 - 3b)$$

και χωρίζοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη στη (34) λαμβάνουμε το ισοδύναμο σύστημα διαφορικών εξισώσεων :

$$\begin{aligned} r' - \frac{1}{2}a^2 r + \frac{1}{4}a^2 r^3 + a^2 r |\Lambda|^2 (1 - \Omega) - \frac{1}{4}a^2 r |\Lambda| (2 - \Omega) \sin(\sigma T_1 - 3b) &= 0 \\ b' - \frac{1}{4}a^2 |\Lambda| (2 - \Omega) \cos(\sigma T_1 - 3b) &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

Το σύστημα (35) δεν είναι αυτόνομο. Εισάγοντας το μετασχηματισμό :

$$\gamma(T_1) = \sigma T_1 - 3b(T_1) \quad (36)$$

οπότε

$$b = \frac{\sigma T_1 - \gamma}{3}, \quad b' = \frac{\sigma - \gamma'}{3}$$

λαμβάνουμε το αυτόνομο σύστημα:

$$\begin{aligned} r' - \frac{1}{2} \alpha^2 r + \frac{1}{4} \alpha^2 r^3 + \alpha^2 r |\Lambda|^2 (1 - \Omega) - \frac{1}{4} \alpha^2 r |\Lambda| (2 - \Omega) \sin \gamma &= 0 \\ \gamma' = \sigma + \frac{3}{4} \alpha^2 |\Lambda| (2 - \Omega) \cos \gamma & \end{aligned} \quad (37)$$

Αναζητούμε τις λύσεις του συστήματος (37) στη μόνιμη κατάσταση, δηλ όταν :

$$r'(T_1) = 0 \quad \text{και} \quad \gamma'(T_1) = 0$$

Τότε λαμβάνουμε το αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων :

$$\begin{aligned} -2 + r^2 + |\Lambda|^2 (1 - \Omega) &= |\Lambda| (2 - \Omega) \sin \gamma \\ \frac{4\sigma}{3\alpha^2} &= |\Lambda| (2 - \Omega) \cos \gamma \end{aligned} \quad (38)$$

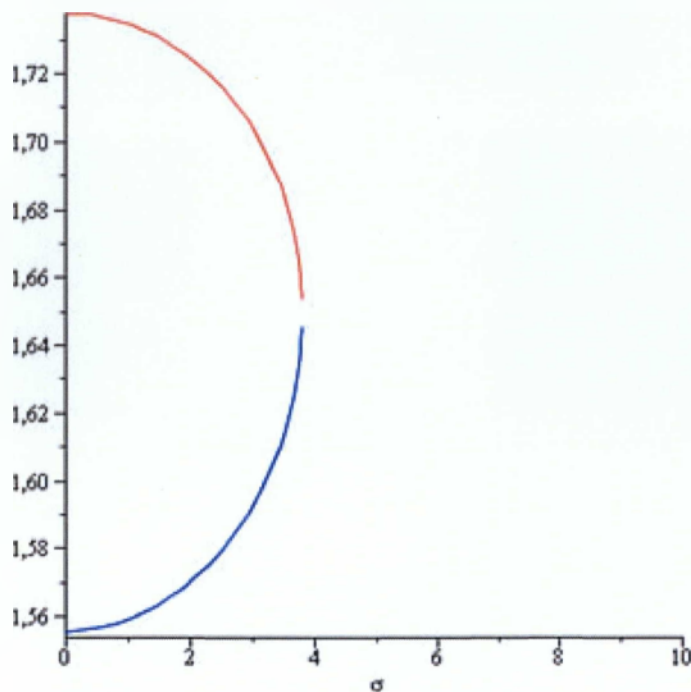
Υψώνοντας τις σχέσεις (38) στο τετράγωνο και στη συνέχεια προσθέτοντας κατά μέλη λαμβάνουμε :

$$[-2 + r^2 + |\Lambda|^2 (1 - \Omega)]^2 + \frac{16\sigma^2}{9\alpha^4} = |\Lambda|^2 (2 - \Omega)^2 \quad (39)$$

Η εξίσωση (39) είναι η σχέση πλάτους r και παραμέτρου αποσυντονισμού σ , η οποία πρέπει να επιλυθεί ως προς r . Έχοντας εισάγει την παράμετρο αποσυντονισμού, μπορούμε πλέον στην εξίσωση (39) να αντικαταστήσουμε την τιμή $\Omega=3$. Τότε λαμβάνοντας υπ' όψιν και την (29) η σχέση (39) γίνεται :

$$\left(r^2 - 2 + \frac{U_0^2}{32}\right)^2 + \frac{16\sigma^2}{9\alpha^4} = \frac{U_0^2}{256} \quad (40)$$

Με χρήση υπολογιστή κατασκευάζουμε το διάγραμμα $(\sigma, \delta(\sigma))$ για δεδομένες τιμές των παραμέτρων U_0 (πλάτος εξωτερικής διέγερσης) και α (απόσβεση). Υπενθυμίζουμε ότι πρέπει $r > 0$, ενώ στη μόνιμη κατάσταση r : σταθερά (ανεξάρτητος του χρόνου T_1).



Σχ. 2.9 Γραφική παράσταση των 2 κλάδων της 40 για $U_0=4,8$ και $a=4.1$

Έστω τώρα $r_0(\sigma) > 0$ μια λύση της (40). Από τη δεύτερη σχέση των εξισώσεων (38) για $\Omega=3$ (λαμβάνοντας υπ' όψιν και την (30) για σταθερά Λ) έχουμε ότι:

$$\cos \gamma = \frac{4\sigma}{3a^2U_0} \quad \text{ή} \quad \gamma = \arccos \frac{64\sigma}{3a^2U_0}$$

και λόγω του μετασχηματισμού (36) έπεται ότι :

$$b(T_1) = \frac{1}{3} \sigma T_1 - \frac{1}{3} \arccos \frac{64\sigma}{3a^2U_0}$$

Τώρα έχουμε την ακριβή μορφή της σχέσης (17) στη μόνιμη κατάσταση. Βάσει της σχέσης (29) είμαστε σε θέση να γράψουμε την προσεγγιστική λύση (3) στη μόνιμη κατάσταση με ακρίβεια τάξης ε . Είναι :

$$u(T_0, T_1) = \frac{1}{2} r_0(\sigma) [e^{i(T_0+ib(T_1))} + e^{-i(T_0+ib(T_1))}] + \frac{1}{2} \frac{U_0}{1-\Omega^2} [e^{i\Omega T_0} - e^{-i\Omega T_0}] + O(\varepsilon) =$$

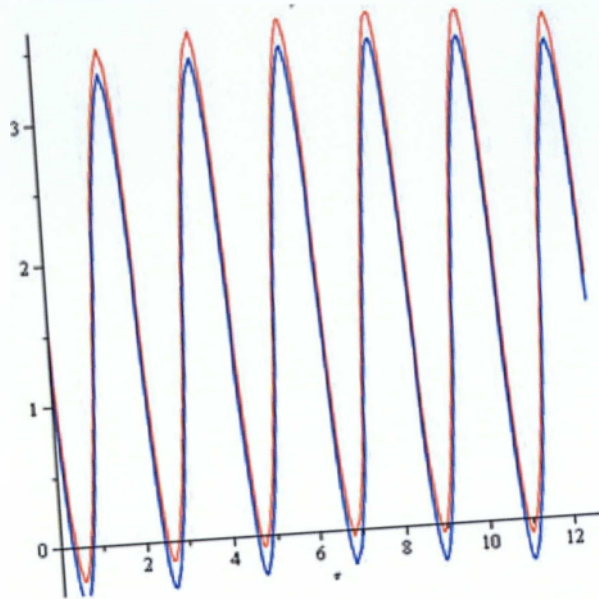
$$r_0(\sigma) \cos(T_0 + ib(T_1)) + \frac{U_0}{1-\Omega^2} \sin(\Omega T_0) + O(\varepsilon) =$$

$$r_0(\sigma) \cos\left[T_0 + \frac{1}{3} b(T_1) - \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{64\sigma}{3a^2U_0^2}\right)\right] + \frac{U_0}{1-\Omega^2} \sin(\Omega T_0) + O(\varepsilon)$$

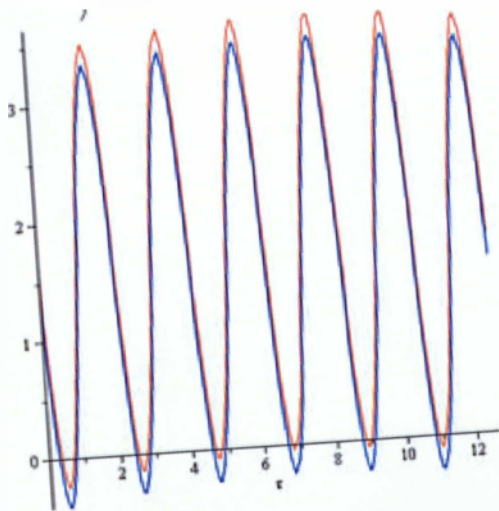
Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις σχέσεις (2) και (32) προκύπτει η τελική μορφή:

$$u(\tau) = r_0(\sigma) \cos\left[\frac{1}{3}\Omega\tau - \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{64\sigma}{3a^2U_0^2}\right)\right] + \frac{U_0}{1-\Omega^2} \sin(\Omega\tau) + O(\varepsilon) \quad (41)$$

η οποία είναι η προσεγγιστική λύση στη μόνιμη κατάσταση για τις τιμές της συχνότητας Ω κοντά στο 3, δηλαδή κοντά στο δευτερεύοντα υφαρμονικό συντονισμό.



Σχ. 2.10 Γραφική παράσταση της (41) για $\varepsilon = 1$, $U_0 = 5,44$, $a = 1,1$ και $\sigma = 0,021$



Σχ. 2.11 Ομοίως για $\varepsilon = 1$, $U_0 = 4,7$, $a = 1,1$ και $\sigma = 0,021$

2.3.2 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΚΟΝΤΑ ΣΤΟΝ ΥΠΕΡΑΡΜΟΝΙΚΟ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟ

Εισάγουμε παράμετρο αποσυντονισμού σ έτσι ώστε :

$$\Omega = \frac{1}{3} + \varepsilon\sigma \quad (42)$$

όπου ε αρκετά μικρό (από τα δεδομένα του κυκλώματος $\varepsilon = R/100R_0$) Τότε :

$$\Omega \tau = \Omega T_0 = \left(\frac{1}{3} + \varepsilon\sigma\right)\tau = \frac{1}{3}T_0 + \varepsilon\sigma T_1$$

Από την εξίσωση (31), στην περίπτωση αυτή η διαφορική εξίσωση διαμόρφωσης θα είναι :

$$2iA' - ia^2A + 2ia^2A^2\bar{A} + 2ia^2A|\Lambda|^2(2+\Omega) - a^2|\Lambda|^3 e^{3i\sigma T_1} = 0 \quad (43)$$

με $|\Lambda|^2 = \Lambda\bar{\Lambda}$ και $\Lambda = -i|\Lambda|$.

Αναζητούμε λύσεις της (43) στη μορφή (17). Με την βοήθεια των σχέσεων (18) η εξίσωση (43) λαμβάνουμε την μορφή :

$$ir' - \frac{1}{2}ia^2r + \frac{1}{4}ia^2r^3 + ia^2r|\Lambda|^2(\Omega+2) - rb' - a^2|\Lambda|^3 e^{i(3\sigma T_1 - b)} = 0 \quad (44)$$

Κάνοντας χρήση της ταυτότητας :

$$e^{i(3\sigma T_1 - b)} = \cos(3\sigma T_1 - b) + i \sin(3\sigma T_1 - b)$$

και χωρίζοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη στην (44) λαμβάνουμε το ισοδύναμο σύστημα διαφορετικών εξισώσεων :

$$\begin{aligned} r' - \frac{1}{2}a^2r + \frac{1}{4}a^2r^3 + a^2r|\Lambda|^2(\Omega+2) - a^2|\Lambda|^3 \sin(3\sigma T_1 - b) &= 0 \\ -rb' - a^2|\Lambda|^3 \cos(3\sigma T_1 - b) &= 0 \end{aligned} \quad (45)$$

Το σύστημα (45) δεν είναι αυτόνομο. Εισάγοντας το μετασχηματισμό :

$$\gamma(T_1) = 3\sigma T_1 - b(T_1) \quad (46)$$

οπότε:

$$b = 3\sigma T_1 - \gamma, \quad b' = 3\sigma - \gamma'$$

Λαμβάνουμε το αυτόνομο σύστημα :

$$\begin{aligned} r' &= \frac{1}{2}a^2r + \frac{1}{4}a^3r^3 + a^2r|\Lambda|(\Omega + 2) + a^2|\Lambda|^3 \sin \gamma \\ -r\gamma' &= 3\sigma r + a^2|\Lambda|^3 \cos \gamma \end{aligned} \quad (47)$$

Αναζητούμε τις λύσεις του συστήματος (47) στη μόνιμη κατάσταση, δηλαδή όταν

$$r'(T_1) = 0 \quad \text{και} \quad \gamma'(T_1) = 0$$

Τότε λαμβάνουμε το αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}r + \frac{1}{4}r^3 + r|\Lambda|(\Omega + 2) &= |\Lambda|^3 \sin \gamma \\ -\frac{3\sigma}{a^2}r &= |\Lambda|^3 \cos \gamma \end{aligned} \quad (48)$$

Υψώνοντας τις σχέσεις (48) στο τετράγωνο και στη συνέχεια προσθέτοντας κατά μέλη λαμβάνουμε :

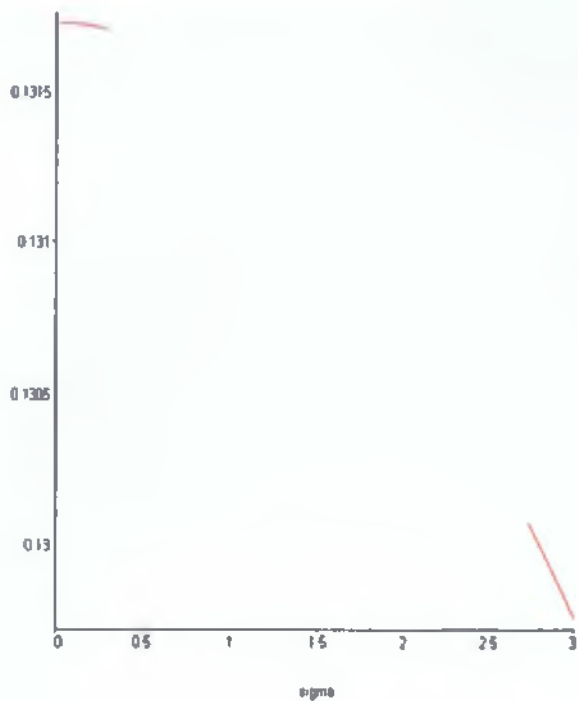
$$r^2\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}r^2 + |\Lambda|(\Omega + 2)\right] + \frac{9\sigma^2}{a^4}r^2 = |\Lambda|^6 \quad (49)$$

Η εξίσωση (49) είναι η σχέση πλάτους r και παραμέτρου αποσυντονισμού σ , η οποία πρέπει να επιλυθεί προς r . Όπως και προηγουμένως, έχοντας εισαγάγει την παράμετρο αποσυντονισμού σ , μπορούμε πλέον στην εξίσωση (49) να αντικαταστήσουμε την τιμή $\Omega=1/3$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν και την τιμή σταθεράς Λ από την σχέση (30) η εξίσωση (49) γίνεται :

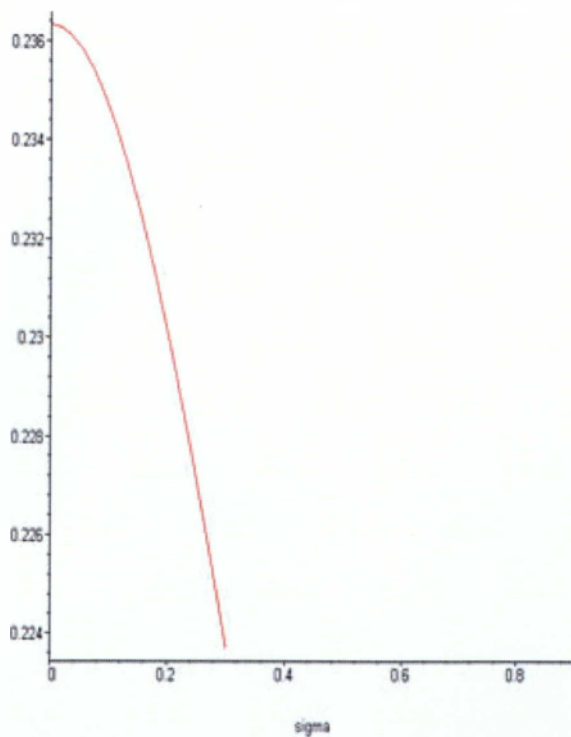
$$r^2\left(\frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{2} + \frac{7U_0^2}{4}\right) + \frac{9}{a^4}\sigma^2r^2 = \frac{729U_0^6}{4.096} \quad (50)$$

Με χρήση υπολογιστή κατασκευάζουμε στον υπολογιστή τη γραφική παράσταση $(\sigma, r(\sigma))$, (για δεδομένες τιμές του πλάτους εξωτερικής διέγερσης U_0 και της απόσβεσης a) και λαμβάνουμε τις θετικές ρίζες της (50), $r(\sigma)$. Υπενθυμίζουμε ότι στην μόνιμη κατάσταση το πλάτος r είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του χρόνου T_1 .

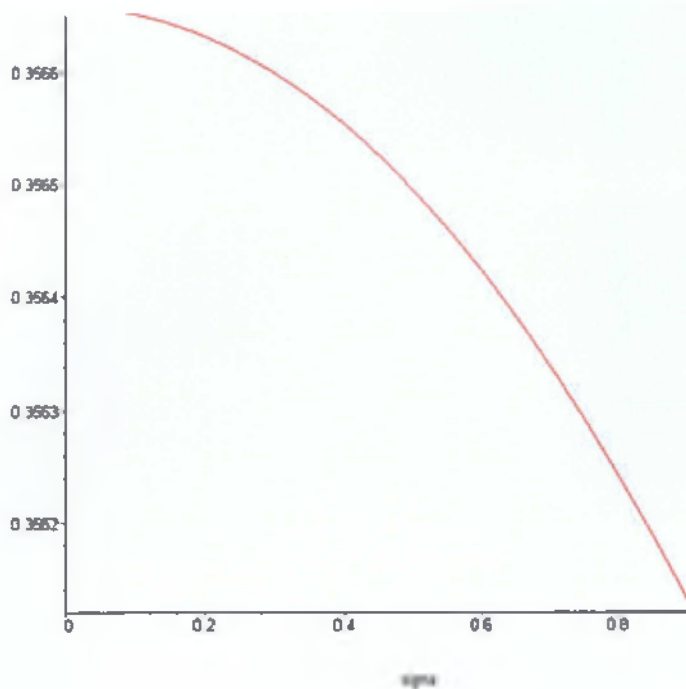
Με $U=4.52$ θα έχουμε τις εξής γραφικές παραστάσεις:



Σχ. 2.12 Γραφική παράσταση για την 1^η θετική ρίζα της (50)



Σχ. 2.13 2^η θετική ρίζα της (50)



Σχ. 2.14 Ομοίως και η 3^η θετική ρίζα της (50)

Έστω τώρα $r_0(\sigma) > 0$ μια λύση της (50). Από τη δεύτερη σχέση εξισώσεων (48) για $\Omega=1/3$ (λαμβάνοντας υπ' όψιν και την σχέση (30) για την σταθερά Λ) έχουμε ότι :

$$\cos \gamma = \frac{64\sigma^3}{9a^2U_0^3} r_0(\sigma)$$

Άρα

$$\gamma = \arccos\left(-\frac{64r_0\sigma^3}{9a^2U_0^3}\right) = \pi - \arccos\frac{64r_0\sigma^3}{9a^2U_0^3}$$

οπότε λόγω του μετασχηματισμού (46) έπεται ότι :

$$b(T_1) = 3\sigma T_1 - \pi + \arccos\frac{64\sigma^3}{9a^2U_0^3} r_0(\sigma)$$

Τώρα έχουμε την ακριβή μορφή της σχέσης (17) στη μόνιμη κατάσταση. Βάσει της σχέσης (29) είμαστε σε θέση να γράψουμε την προσεγγιστική λύση (3) στη μόνιμη κατάσταση με ακρίβεια τάξης ϵ . Είναι:

$$u(T_0, T_1) = r_0(\sigma) \cos(T_0 + b(T_1)) + \frac{U_0}{1-\Omega^2} \sin(\Omega T_0) + O(\varepsilon) =$$

$$r_0(\sigma) \cos[T_0 + 3\varepsilon\sigma T_1 - \pi + \arccos(\frac{64\sigma^3}{9\alpha^2 U_0^3} r_0(\sigma))] + \frac{U_0}{1-\Omega^2} \sin(\Omega T_0) + O(\varepsilon)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις σχέσεις (2) και (42) προκύπτει η τελική μορφή :

$$u(\tau) = r_0(\sigma) \cos[3\Omega\tau - \pi + \arccos(\frac{64\sigma^3}{9\alpha^2 U_0^3} r_0(\sigma))] + \frac{U_0}{1-\Omega^2} \sin(\Omega T_0) + O(\varepsilon) \quad (51)$$

η οποία είναι η προσεγγιστική λύση στη μόνιμη κατάσταση για τιμές της συχνότητας Ω του εξωτερικού διεγέρτη κοντά στο 1/3, δηλαδή κοντά στο δευτερεύοντα υπεραρμονικό συντονισμό.

2.4 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΜΑΚΡΥΑ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥΣ

Εδώ θεωρούμε ότι $\Omega \neq 1, 3, 1/3$, ενώ η εξωτερική διέγερση μπορεί να έχει οσοδήποτε μεγάλο πλάτος. Στην περίπτωση αυτή, από την εξίσωση (31) η διαφορική εξίσωση διαμόρφωσης θα είναι :

$$2A' - a^2 A + 2a^2 \overline{A^2 A} + 2(2 - \Omega)a^2 A |\Lambda|^2 = 0 \quad (52)$$

όπου $|\Lambda|^2 = \Lambda \overline{\Lambda}$.

Αναζητούμε λύσεις της (52) στην μορφή (17). Με τη βοήθεια των σχέσεων (18) η εξίσωση (52) λαμβάνει τη μορφή :

$$r' + irb' - \frac{1}{2}a^2 r + \frac{1}{4}a^2 r^3 + (2 - \Omega)a^2 r |\Lambda|^2 = 0 \quad (53)$$

Χωρίζοντας στην εξίσωση (53) τα πραγματικά και φανταστικά μέρη, λαμβάνουμε τον ισοδύναμο σύστημα διαφορικών εξισώσεων :

$$r' = \frac{1}{2}a^2 r - \frac{1}{4}a^2 r^3 - (2 - \Omega)a^2 r |\Lambda|$$

$$rb' = 0 \quad (54)$$

το οποίο είναι αυτόνομο. Παρατηρούμε ότι η λύση της δεύτερης εξίσωσης από τις (54) είναι

$$b = b_0$$

ενώ στην μόνιμη κατάσταση όταν δηλαδή :

$$r'(T_1) = 0$$

η πρώτη εξίσωση από τις (54) γίνεται αλγεβρική λαμβάνοντας τη μορφή:

$$\frac{1}{2} a^2 [(1 - (2 - \Omega) |\Lambda|) r - \frac{1}{2} r^3] = 0 \quad (55)$$

Θέτοντας στη (55)

$$\frac{B}{2} = 1 - (2 - \Omega) |\Lambda| \quad (56)$$

ισοδύναμα προκύπτει

$$r^2 = B > 0$$

ή

$$r_0 = \sqrt{2[1 - (2 - \Omega) |\Lambda|]} = \sqrt{B} \quad (57)$$

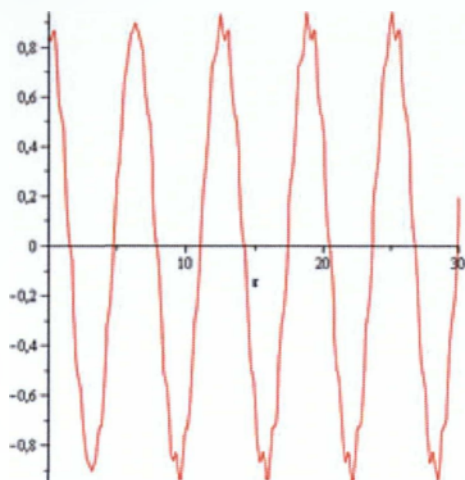
εφ' όσον θα πρέπει εξ υποθέσεως $r > 0$. Συνεπώς στην περίπτωση όπου δεν έχουμε συντονισμό πρωτεύοντα ή δευτερεύοντα η προσεγγιστική λύση της (1) στη μόνιμη κατάσταση, λόγω των σχέσεων (3), (29) και (57) λαμβάνει την μορφή :

$$\begin{aligned} u(\tau) &= u(T_0, T_1) = u_0(T_0, T_1) + O(\varepsilon) = \\ &A(T_1)e^{iT_0} + \overline{A(T_1)}e^{-iT_0} + \frac{U_0}{1 - \Omega^2} \sin(\Omega T_0) + O(\varepsilon) = \\ &r_0 \cos(T_0 + b_0) + \frac{U_0}{1 - \Omega^2} \sin(\Omega T_0) + O(\varepsilon) = \\ &\sqrt{2[(2 - \Omega) |\Lambda|]^2} \cos(T_0 + b_0) + \frac{U_0}{1 - \Omega^2} \sin(\Omega T_0) + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (58)$$

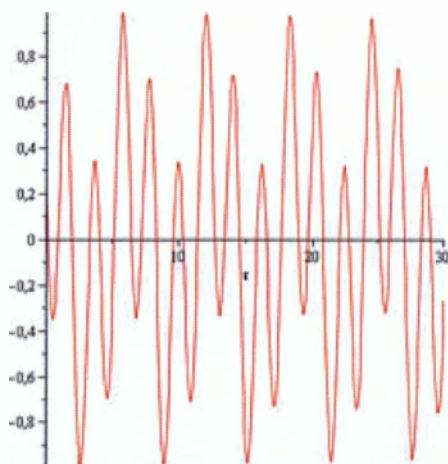
Τώρα λόγω των σχέσεων (2) και (30) η (58) λαμβάνει τη μορφή :

$$u(t) = \sqrt{2 - \frac{2 - \Omega}{2(1 - \Omega^2)} U_0^2} \cos(t + \beta_0) + \frac{U_0}{1 - \Omega^2} \sin \Omega t \quad (59)$$

η οποία προσεγγιστική λύση της (1) στη μόνιμη κατάσταση και μακριά από την περιοχή των συντονισμών, δηλαδή $\Omega \neq 1, 3, 1/3$.



Σχ. 2.15 Αυτή είναι η γραφική παράσταση ($t, u(t)$) της σχέσης 59 για $\Omega=10$, $\varepsilon=10^{-5}$, $U_0=5,44$, ενώ στην μόνιμη κατάσταση η απόσβεση α δεν επηρεάζει.



Σχ. 2.16 Ομοίως για $\Omega=3,02$, κοντά στον υαρμομονικό συντονισμό. Το αποτέλεσμα είναι ανακριβές αφού είχαμε δει στην μελέτη των συντονισμών η απόσβεση παίζει σημαντικό ρόλο, ενώ εδώ δεν παίζει.

Ας επιστρέψουμε τώρα στην πρώτη από τις διαφορετικές εξισώσεις (54). Πρόκειται για διαφορετική εξίσωση χωριζόμενων των μεταβλητών, η οποία γράφεται ισοδύναμα στη μορφή :

$$\frac{4}{a^2} \frac{dr}{r(B-r^2)} = dT_1 \quad (60)$$

Η ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$\frac{dr}{r(B-r^2)} = \frac{1}{B} \frac{1}{r} + \frac{1}{2B} \frac{1}{\sqrt{B-r}} - \frac{1}{2B} \frac{1}{\sqrt{B+r}}$$

επιτρέπει την ολοκλήρωση της (60) :

$$T_1 = \int dT_1 = \frac{4}{a^2} \int \frac{dr}{r(B-r^2)} = \frac{4}{a^2 B} \ln \frac{r}{\sqrt{B-r^2}}$$

οπότε

$$\frac{r^4}{B-r^2} = e^{\frac{a^2 B}{2} T_1} \quad (61)$$

Λύνοντας την (61) ως προς $r = r(T_1)$ λαμβάνουμε:

$$r(T_1) = \left[\frac{1}{2} (\sqrt{e^{a^2 B T_1} + 4B e^{a^2 B T_1 / 2}} - e^{a^2 B T_1 / 2}) \right]^{1/2}$$

και συνεπώς η προσεγγιστική λύση θα είναι :

$$u(T_0, T_1) = r(T_1) \cos(T_0 + b_0) + \frac{U_0^2}{1-\Omega^2} \sin(\Omega T_0) + O(\varepsilon)$$

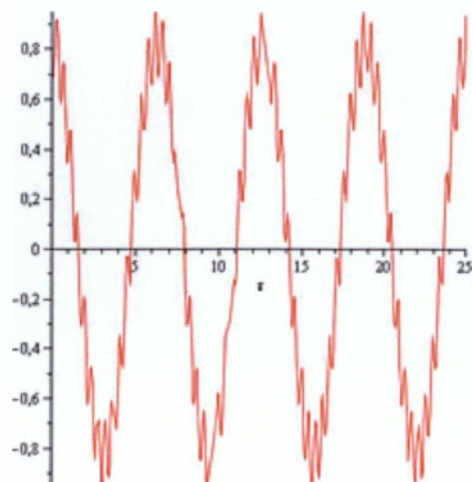
ή

$$u(\tau) = \left[\frac{1}{2} (\sqrt{e^{a^2 B \tau} + 4B e^{a^2 B \tau / 2}} - e^{a^2 B \tau / 2}) \right]^{1/2} \cos(\tau + b_0) + \frac{U_0^2}{1-\Omega^2} \sin(\Omega T_0) + O(\varepsilon) \quad (62)$$

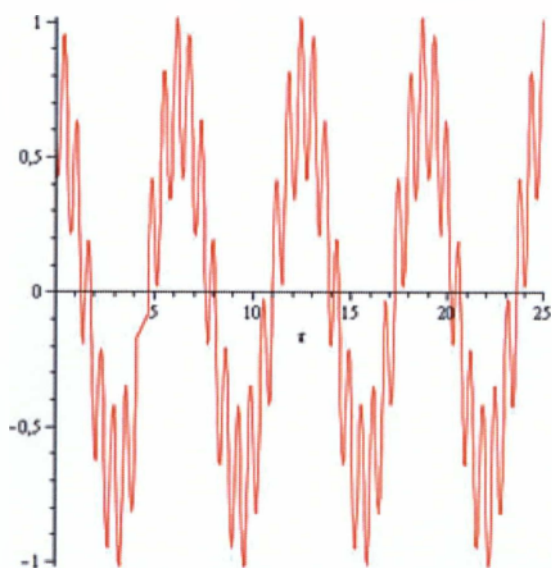
Τότε η λύση στη μόνιμη κατάσταση προκύπτει όταν $T_1 \rightarrow \infty$ οπότε :

$$\lim_{T_1 \rightarrow \infty} r(T_1) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} (\sqrt{e^{a^2 B \tau} + 4B e^{a^2 B \tau / 2}} - e^{a^2 B \tau / 2}) \right]^{1/2} = \sqrt{B}$$

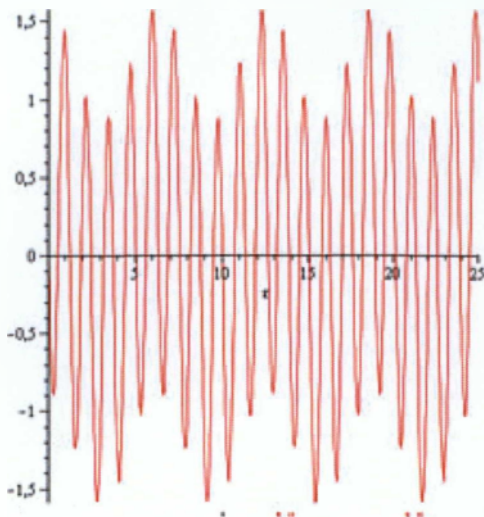
και έτσι προκύπτει η λύση της (59), μακριά από τους συντονισμούς .



Σχ. 2.17 Γραφική παράσταση της σχέσης (62) ($\tau, u(\tau)$) για $U_0=5,44$, $\varepsilon=10^{-5}$, $\alpha=2,5$, $\Omega=15$



Σχ.2.18 Γραφική παράσταση για $\Omega=10$. Στον συντονισμό η απόσβεση παίζει σημαντικό ρόλο, ενώ εδώ δεν παίζει.



Σχ.2.19 Γραφική παράσταση για $\Omega=5$. Στον συντονισμό η απόσβεση παίζει σημαντικό ρόλο, ενώ εδώ δεν παίζει.

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε το εξής : Όταν αναζητούμε λύσεις μακριά από τους συντονισμούς, δηλαδή $\Omega \neq 1, 1/3, 3$ ουσιαστικά θέλουμε για $\Omega > 3$ και για οσοδήποτε μεγάλο πλάτος U_0 της εξωτερικής περιοδικής διέγερσης. Έτσι η προσεγγιστική λύση (59) στη μόνιμη κατάσταση έχει νόημα όταν $B > 0$ όπου B δίνεται από την σχέση (56). Αυτό ισοδυναμεί με:

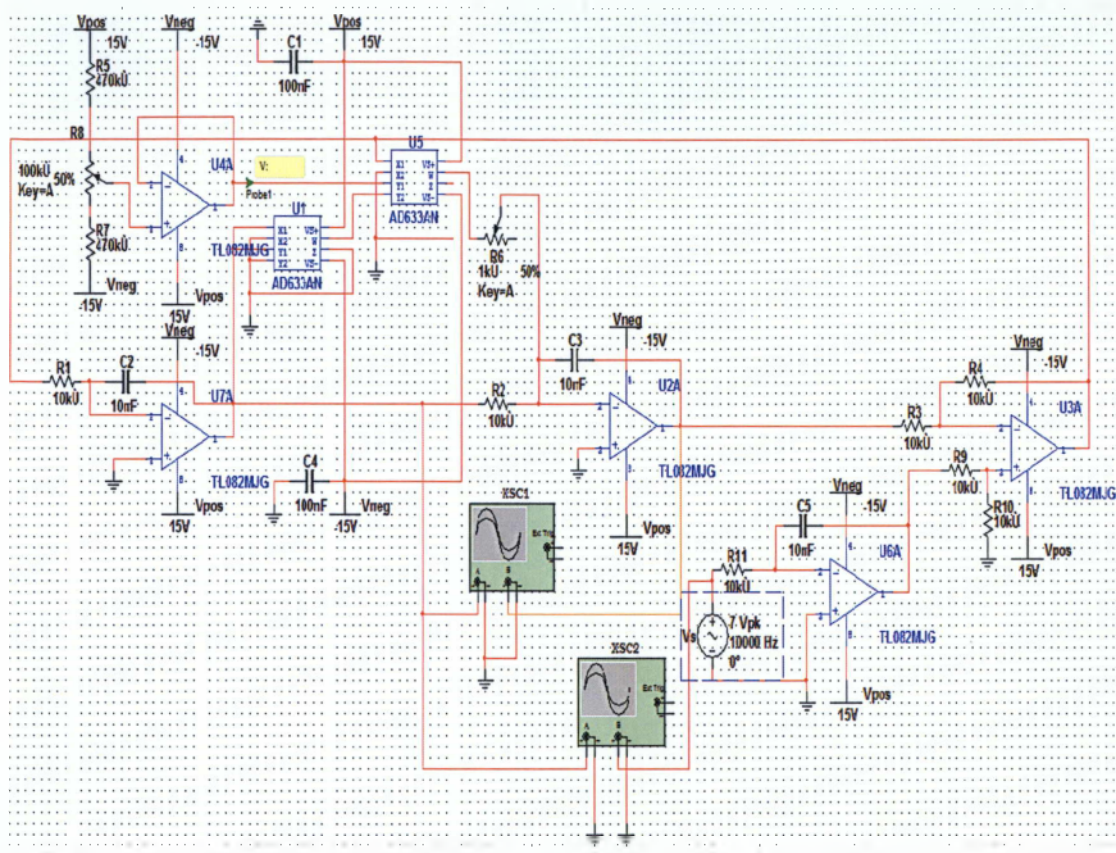
$$2 - \frac{2 - \Omega}{2(1 - \Omega^2)} U_0^2 > 0 \quad \text{με } \Omega > 3 \quad (63)$$

λόγω της σχέσης (59) .

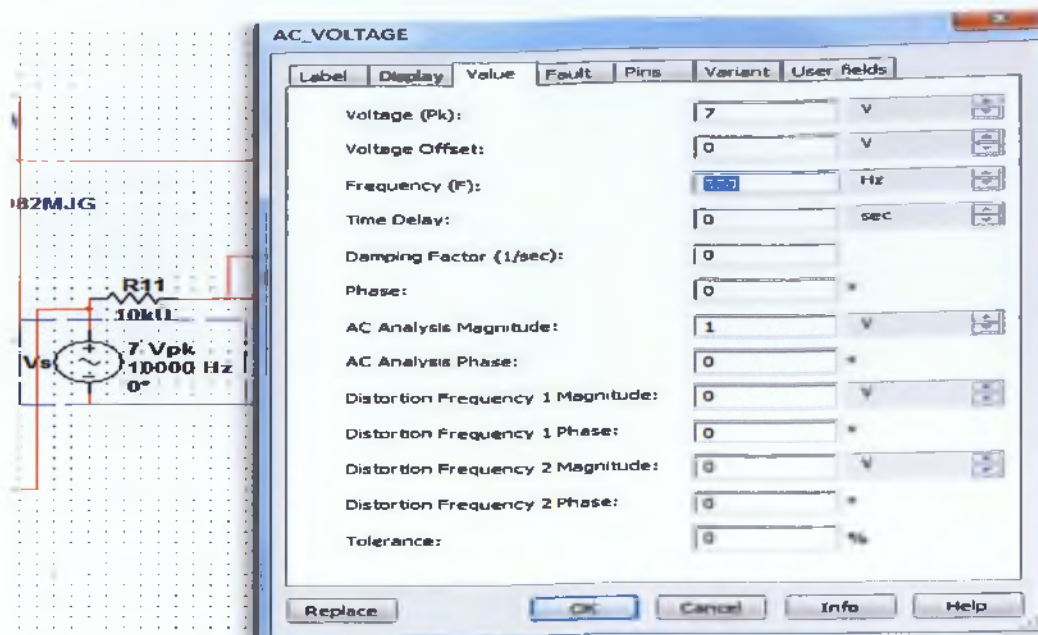
Σημειώνουμε ακόμα ότι ο προσεγγιστικός τύπος (59) είναι ανακριβής όταν η συχνότητα του εξωτερικού διεγέρτη είναι κοντά στους δευτερεύοντες συντονισμούς, δηλαδή κοντά στις τιμές 3 και 1/3 (προφανώς μη εφαρμόσιμος κοντά στο θεμελιώδη συντονισμό), πράγμα το οποίο είναι βασικό χαρακτηριστικό της μη γραμμικής δυναμικής του προβλήματος.

3. ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ VAN DER POL

Με το παρακάτω κύκλωμα υλοποιούμε τον ταλαντωτή Van der Pol με εξωτερική διέγερση στο Multisim.

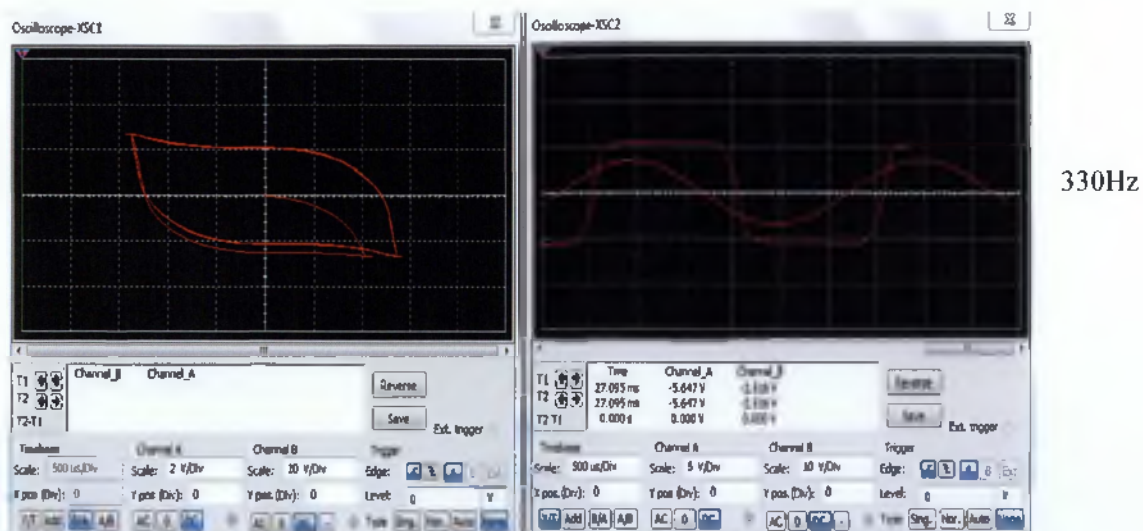


Εικόνα 3.1

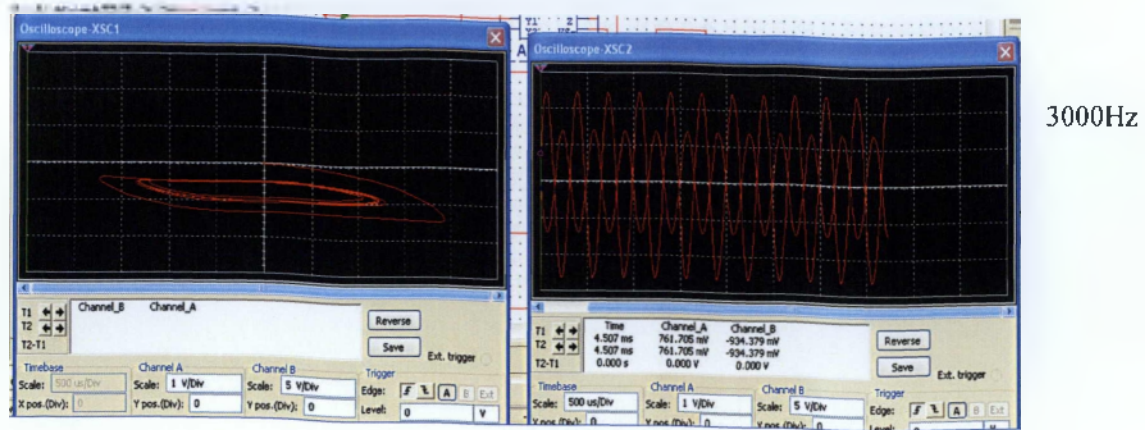


Εικόνα 3.2

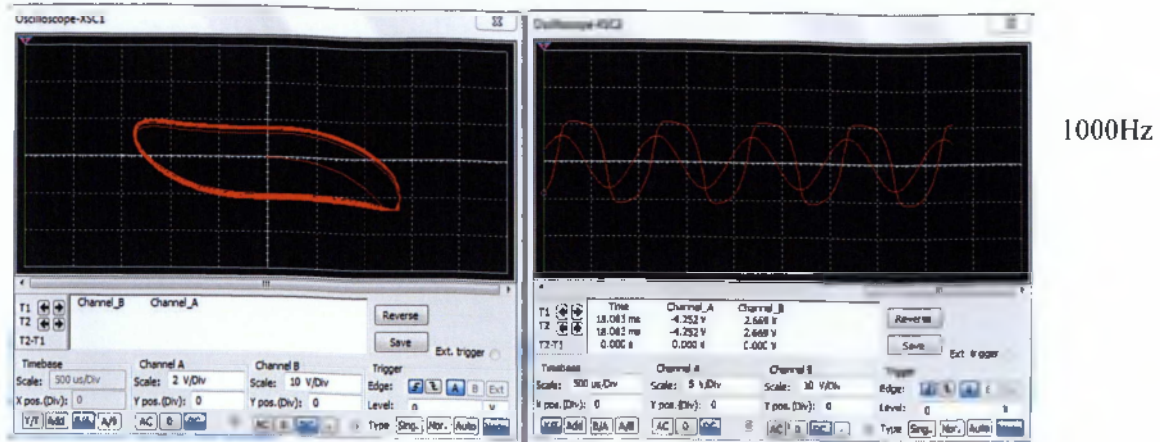
Ρυθμίζοντας την πηγή στα 330hz δηλαδή κοντά στον υπεραρμονικό συντονισμό, στα 3000hz για τον φαρμονικό συντονισμό και στα 1000hz για τον θεμελιώδη συντονισμό θα πάρουμε τις εξής γραφικές παραστάσεις αντίστοιχα :



Εικόνα 3.3

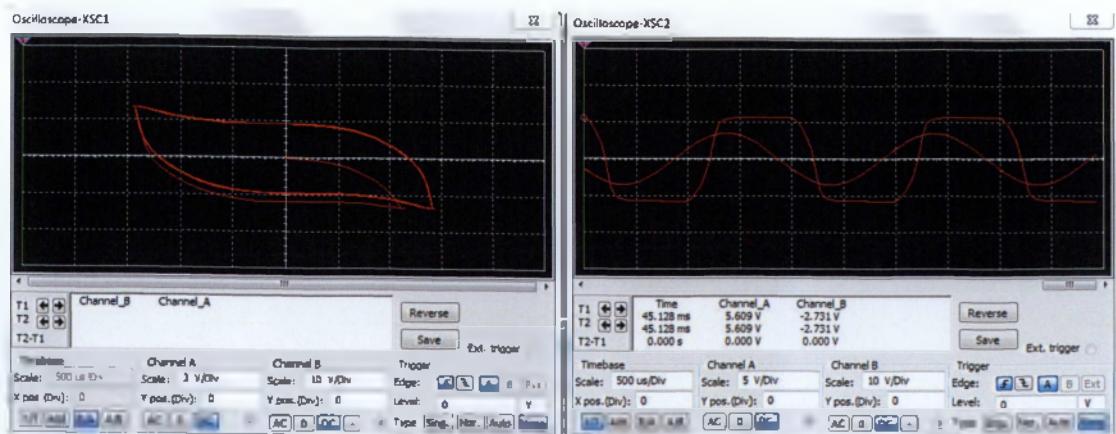


Εικόνα 3.4



Εικόνα 3.5

Πειραματιζόμενοι με τις τιμές της πηγής και δίνοντας 500Hz θα πάρουμε τις εξής γραφικές παραστάσεις :



Εικόνα 3.6

Δοκιμάζοντας και την τιμή των 5000hz θα πάρουμε τα εξής αποτελέσματα :



Εικόνα 3.7

Ο συγκεκριμένος ταλαντωτής έχει την ιδιότητα να σταθεροποιεί το πλάτος της ταλάντωσης κοντά σε αυτό του εξωτερικού διεγέρτη, καθώς και με τη συχνότητα κοντά στη συχνότητα του εξωτερικού διεγέρτη. Στην περίπτωση των συντονισμών πετυχαίνουμε το μέγιστο σταθεροποιημένο πλάτος.

Κοιτάζοντας το επίπεδο φάσεων (phase plane) η τελική ταλάντωση (αυτό που λέμε μόνιμη κατάσταση) συμβαίνει πάνω στον συγκεκριμένο κύκλο (κλειστή καμπύλη) που σχηματίζεται. Το μήκος της ακτίνας του περίπου αυτού κύκλου μεταβάλλεται για τις συγκεκριμένες τιμές της συχνότητας του εξωτερικού διεγέρτη (πλάτος - παράμετρος αποσυντονισμού). Δυστυχώς από μαθηματικής άποψης είναι δύσκολο να κατασκευαστεί το επίπεδο φάσεων, λόγω του δεύτερου μέλους (εξωτερικού διεγέρτη), χρειάζεται προγραμματισμός.

Η αξία τελικά αυτού του ταλαντωτή είναι πως για οποιοσδήποτε αρχικές συνθήκες ($u(0)$ τάση τη χρονική στιγμή 0 και $u'(0)$ παράγωγος της τάσης τη χρονική στιγμή 0), επιλέγοντας κατάλληλο εξωτερικό περιοδικό διεγέρτη (δηλ. U και Ω) μπορούμε να πετύχουμε το πλάτος που θέλουμε.

4.ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΚΩΔΙΚΑΣ ΣΤΟΣ MAPLE

4.1. ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ

```
> restart;
> assume(a > 0);
>
> eq1 := 1/4*alpha^2*a^2*(1-1/4*a^2)^2 + a^2*sigma^2 - k^2
/4
> asol := solve(eq1 = 0, a)
> a1 := asol[1];
> a2 := asol[2];
> a3 := asol[3];
> a4 := asol[4];
> discr := 12288*sigma^6 + 24576*sigma^4 - 15360*sigma^2 + 2112;
> plot(discr, sigma=0.1..0.8);
> fsolve(discr, sigma=0.4..0.8)
> k1 := 1.66; alpha := 0.58;
> a_1 := subs([k = k1, alpha = alpha1], a1);
> plot(a_1, sigma=0..0.7);
> k2 := k1; alpha := 1.68;
> a_2 := subs([k = k2, alpha = alpha2], a1);
> plot(a_2, sigma=0..0.7);
> k3 := 0.82; alpha3 := 1.68;
> a_3 := subs([k = k3, alpha = alpha3], a1);
> plot(a_3, sigma=0..0.7);
> k4 := 0.82; alpha4 := 0.34;
> a_4 := subs([k = k4, alpha = alpha4], a1);
> plot(a_4, sigma=0..0.7);
> epsilon := 0.00001;
> sigma := 0.0175; alpha := 2.3; k := 1.75;
> T0 := tau; T1 := epsilon*tau;
> treq_h := sigma*a - 1/2*k*sin(gamma0);
> assume(gamma0 < Pi); assume(-Pi < gamma0);
> solve(treq_h, gamma0);
> gamma1 := arcsin(2*sigma*a/k);
> b0 := (sigma*T1 - gamma1);
> ut := a*cos(T0 + b0);
> ut1 := subs(a = a1, ut);
> ut2 := subs(a = a2, ut);
> ut3 := subs(a = a3, ut);
> ut4 := subs(a = a4, ut);
> plot(ut1, tau = 0..15);
> plot(ut2, tau = 0..15);
> plot(ut3, tau = 0..15);
```

4.2. ΥΦΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ

```

> restart;
> eq2 :=  $\left(-2 + a^2 - \frac{U^2}{32}\right)^2 + \frac{16 \cdot \sigma^2}{(9 \cdot \alpha^4)} - \frac{U^2}{256}$ ;
> a_sol := solve(eq2, a);
> discr2 :=  $9 \cdot U^2 \cdot \alpha^4 - 4096 \cdot \sigma^2$ ;
> ash1 := a_sol[1]; ash2 := a_sol[3];
> U_1 := 4.8; alpha_1 := 4.1;
> ash_1 := subs([U = U_1, alpha = alpha_1], ash1) : ash_2
:= subs([U = U_1, alpha = alpha_1], ash2) :

> solve(discr2, sigma);
> plot([ash_1, ash_2], sigma = 0..10, color = [red, blue]);
> ash_1 := subs([U = U_1, alpha = alpha_1], ash1) : ash_2
:= subs([U = U_1, alpha = alpha_1], ash2) :

> solve(discr2, sigma);
> plot([ash_1, ash_2], sigma = 0..10, color = [red, blue]);
> alpha := 1.1; sigma := 0.021; U0 := 5.44;
> epsilon := 1;
> assume(-Pi < gamma0); assume(gamma0 < Pi);
> req :=  $\frac{-4 \cdot \sigma}{(3 \cdot \alpha^2)} + \frac{U}{16} \cdot \cos(\text{gamma0})$ ;
> gamma1 := solve(req = 0, gamma0);
> T1 := epsilon tau;
> b0 :=  $\frac{(\sigma \cdot T1 - \text{gamma1})}{3}$ ;
> At1 :=  $a \cdot \exp\left(\frac{T1 \cdot (0.2 \cdot T1 - \text{gamma1})}{3}\right)$ ;
> ut :=  $a \cdot \cos\left(\frac{(0.2 \cdot \text{epsilon tau} - \text{gamma1})}{3}\right) - \frac{U0^2}{16} \cdot \sin(3 \cdot \text{tau})$ ;
> ut1 := subs(a = ash1, ut) : ut2 := subs(a = ash2, ut) :
> U0 := 5.44;
> ut1_0 := subs(U = U0, ut1) : ut2_0 := subs(U = U0, ut2) :
> plot([ut1_0, ut2_0], tau = 0.. $\frac{12 \cdot \text{Pi}}{3}$ , color = [red, blue]);
> U := 4.7;
> ut1; ut2;
> plot([ut1_0, ut2_0], tau = 0.. $\frac{12 \cdot \text{Pi}}{3}$ , color = [red, blue]);

```


4.3. ΥΠΕΡΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ

```
> restart;
> assume(a>0);
> eq3:=a^2*(-1/2+a^2/4+7*U/4)^2+9*sigma^2/alpha^4*a^4-9^3/16^3*U^6;
> eq3y:=collect(expand(subs([a^2=y,a^4=y^2],eq3)),y);
> eq4:=16*eq3y;
> ysol:=solve({eq3y=0},{y}):
> ysol[1]:ysol[2]:ysol[3];
> y1:=1/24/alpha^4*(43008*alpha^12*U-4096*alpha^12-
2211840*alpha^8*sigma^2+175616*alpha^12*U^3-150528*alpha^12*U^2-
27095040*alpha^8*U^2*sigma^2+15482880*alpha^8*U*sigma^2+19683*U^6*alpha^12-
445906944*U*alpha^4*sigma^4+127401984*alpha^4*sigma^4-
1528823808*sigma^6+9*3^(1/2)*(-2348810240*alpha^8*U*sigma^2-
57545850880*alpha^8*U^3*sigma^2+16441671680*alpha^8*U^2*sigma^2-
177570054144*alpha^4*U^2*sigma^4+33822867456*U*alpha^4*sigma^4-
70493667328*alpha^8*U^5*sigma^2+100705239040*alpha^8*U^4*sigma^2-
362538860544*alpha^4*U^4*sigma^4+414330126336*alpha^4*U^3*sigma^4+134217728*
alpha^8*sigma^2-2415919104*alpha^4*sigma^4-
663552*U^6*alpha^12+6967296*alpha^12*U^7-358318080*alpha^8*sigma^2*U^6-
4389396480*alpha^8*U^8*sigma^2+2508226560*alpha^8*U^7*sigma^2-
72236924928*U^7*alpha^4*sigma^4+20639121408*U^6*alpha^4*sigma^4-
247669456896*U^6*sigma^6+28449792*alpha^12*U^9-
24385536*alpha^12*U^8+1594323*U^12*alpha^12)^(1/2)*alpha^6)^(1/3)+8/3*(4*alpha^8+
49*alpha^8*U^2-28*alpha^8*U+4032*U*alpha^4*sigma^2-
1152*alpha^4*sigma^2+20736*sigma^4)/alpha^4/(43008*alpha^12*U-4096*alpha^12-
2211840*alpha^8*sigma^2+175616*alpha^12*U^3-150528*alpha^12*U^2-
27095040*alpha^8*U^2*sigma^2+15482880*alpha^8*U*sigma^2+19683*U^6*alpha^12-
445906944*U*alpha^4*sigma^4+127401984*alpha^4*sigma^4-
1528823808*sigma^6+9*3^(1/2)*(-2348810240*alpha^8*U*sigma^2-
57545850880*alpha^8*U^3*sigma^2+16441671680*alpha^8*U^2*sigma^2-
177570054144*alpha^4*U^2*sigma^4+33822867456*U*alpha^4*sigma^4-
70493667328*alpha^8*U^5*sigma^2+100705239040*alpha^8*U^4*sigma^2-
362538860544*alpha^4*U^4*sigma^4+414330126336*alpha^4*U^3*sigma^4+134217728*
alpha^8*sigma^2-2415919104*alpha^4*sigma^4-
663552*U^6*alpha^12+6967296*alpha^12*U^7-358318080*alpha^8*sigma^2*U^6-
4389396480*alpha^8*U^8*sigma^2+2508226560*alpha^8*U^7*sigma^2-
72236924928*U^7*alpha^4*sigma^4+20639121408*U^6*alpha^4*sigma^4-
247669456896*U^6*sigma^6+28449792*alpha^12*U^9-
24385536*alpha^12*U^8+1594323*U^12*alpha^12)^(1/2)*alpha^6)^(1/3)-
2/3*(7*U*alpha^4-2*alpha^4+72*sigma^2)/alpha^4;
> y2:=-1/48/alpha^4*(43008*alpha^12*U-4096*alpha^12-
2211840*alpha^8*sigma^2+175616*alpha^12*U^3-150528*alpha^12*U^2-
27095040*alpha^8*U^2*sigma^2+15482880*alpha^8*U*sigma^2+19683*U^6*alpha^12-
445906944*U*alpha^4*sigma^4+127401984*alpha^4*sigma^4-
1528823808*sigma^6+9*3^(1/2)*(-2348810240*alpha^8*U*sigma^2-
57545850880*alpha^8*U^3*sigma^2+16441671680*alpha^8*U^2*sigma^2-
177570054144*alpha^4*U^2*sigma^4+33822867456*U*alpha^4*sigma^4-
70493667328*alpha^8*U^5*sigma^2+100705239040*alpha^8*U^4*sigma^2-
362538860544*alpha^4*U^4*sigma^4+414330126336*alpha^4*U^3*sigma^4+134217728*
alpha^8*sigma^2-2415919104*alpha^4*sigma^4-
663552*U^6*alpha^12+6967296*alpha^12*U^7-358318080*alpha^8*sigma^2*U^6-
4389396480*alpha^8*U^8*sigma^2+2508226560*alpha^8*U^7*sigma^2-
72236924928*U^7*alpha^4*sigma^4+20639121408*U^6*alpha^4*sigma^4-
247669456896*U^6*sigma^6+28449792*alpha^12*U^9-
```



```

>alpha1:=4.75;U1:=0.45;alpha2:=0.8;U2:=0.8;alpha3:=3.55;U3:=1.05;
>y1_1:=subs([U=U1,alpha=alpha1],y1);y2_1:=subs([U=U1,alpha=alpha1],y2);y3_1:=subs([
U=U1,alpha=alpha1],y3);
>plot([y1_1,y2_1,y3_1],sigma=0..0.35,color=[black,blue,green]);
> as:=y1^(1/2);
> (1/24/alpha^4*(43008*alpha^12*U-4096*alpha^12-
2211840*alpha^8*sigma^2+175616*alpha^12*U^3-150528*alpha^12*U^2-
27095040*alpha^8*U^2*sigma^2+15482880*alpha^8*U*sigma^2+19683*U^6*alpha^12-
445906944*U*alpha^4*sigma^4+127401984*alpha^4*sigma^4-
1528823808*sigma^6+9*3^(1/2)*(-2348810240*alpha^8*U*sigma^2-
57545850880*alpha^8*U^3*sigma^2+16441671680*alpha^8*U^2*sigma^2-
177570054144*alpha^4*U^2*sigma^4+33822867456*U*alpha^4*sigma^4-
70493667328*alpha^8*U^5*sigma^2+100705239040*alpha^8*U^4*sigma^2-
362538860544*alpha^4*U^4*sigma^4+414330126336*alpha^4*U^3*sigma^4+134217728*
alpha^8*sigma^2-2415919104*alpha^4*sigma^4-
663552*U^6*alpha^12+6967296*alpha^12*U^7-358318080*alpha^8*sigma^2*U^6-
4389396480*alpha^8*U^8*sigma^2+2508226560*alpha^8*U^7*sigma^2-
72236924928*U^7*alpha^4*sigma^4+20639121408*U^6*alpha^4*sigma^4-
247669456896*U^6*sigma^6+28449792*alpha^12*U^9-
24385536*alpha^12*U^8+1594323*U^12*alpha^12)^(1/2)*alpha^6)^(1/3)+8/3*(4*alpha^8+
49*alpha^8*U^2-28*alpha^8*U+4032*U*alpha^4*sigma^2-
1152*alpha^4*sigma^2+20736*sigma^4)/alpha^4/(43008*alpha^12*U-4096*alpha^12-
2211840*alpha^8*sigma^2+175616*alpha^12*U^3-150528*alpha^12*U^2-
27095040*alpha^8*U^2*sigma^2+15482880*alpha^8*U*sigma^2+19683*U^6*alpha^12-
445906944*U*alpha^4*sigma^4+127401984*alpha^4*sigma^4-
1528823808*sigma^6+9*3^(1/2)*(-2348810240*alpha^8*U*sigma^2-
57545850880*alpha^8*U^3*sigma^2+16441671680*alpha^8*U^2*sigma^2-
177570054144*alpha^4*U^2*sigma^4+33822867456*U*alpha^4*sigma^4-
70493667328*alpha^8*U^5*sigma^2+100705239040*alpha^8*U^4*sigma^2-
362538860544*alpha^4*U^4*sigma^4+414330126336*alpha^4*U^3*sigma^4+134217728*
alpha^8*sigma^2-2415919104*alpha^4*sigma^4-
663552*U^6*alpha^12+6967296*alpha^12*U^7-358318080*alpha^8*sigma^2*U^6-
4389396480*alpha^8*U^8*sigma^2+2508226560*alpha^8*U^7*sigma^2-
72236924928*U^7*alpha^4*sigma^4+20639121408*U^6*alpha^4*sigma^4-
247669456896*U^6*sigma^6+28449792*alpha^12*U^9-
24385536*alpha^12*U^8+1594323*U^12*alpha^12)^(1/2)*alpha^6)^(1/3)-
2/3*(7*U*alpha^4-2*alpha^4+72*sigma^2)/alpha^4)^(1/2);
> as1:=subs([alpha=alpha1,U=U1],as);
> plot(as1,sigma=0..3);
> as2:=subs([alpha=alpha2,U=U2],as);
> plot(as2,sigma=0..0.9);
> as3:=subs([alpha=alpha3,U=U3],as);
> plot(as3,sigma=0..0.9);
> alpha:=alpha3;sigma:=0.0021;U:=U3;epsilon:=0.005;
> T0:=tau;T1:=epsilon*tau;
> gamma1:=evalf(Pi-arccos(64/9*sigma^3/alpha^2/U^3*as));
> b0:=(3*sigma*T1-gamma1);
> as:=evalf(as);
> u_sht:=as*cos(T0+b0)-9/16*U^2*sin(tau/3);
> plot(u_sht,tau=0...100*Pi/3);

```


5. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. M. W. Hirsch, S. Smale, R. L. Devaney: *Differential Equations, Dynamical Systems and Introduction to Chaos*, Elsevier Academic Press, 2nd Edition 2004
2. A. H. Nayfeh, D. T. Mook: *Nonlinear Oscillations*, John Wiley and Sons 1995
3. S. H. Strogatz: *Nonlinear Dynamics and Chaos with applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*, Addison – Wesley 1994
4. D. W. Jordan, P. Smith: *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Oxford University Press, 2007
5. A. F. Vakakis: *An Introduction to Nonlinear Dynamics*, Graduate Notes, National Technical University of Athens, 2002
6. Κ. Καρούμπαλος, Γ. Φιλοκόπρου: *Μαθήματα Ηλεκτρονικής*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Αθηνών 1982
7. A. P. Malvino: *Ηλεκτρονική*, Εκδόσεις Τζιόλα 2001
8. A. Barna, D. I. Porat: *Operational Amplifiers*, 2nd Edition, John Wiley and Sons 1989
9. <http://ccreweb.org/documents/physics/chaos/vdp2006.html>
10. Σ. Τραχανάς: *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*, Π.Ε.Κ. 1989
11. Π. Νίκα: *Θεωρητική Μελέτη και Προσομοίωση Κυκλώματος Ταλαντωτή Van der Pol*, Πτυχιακή Εργασία, Σπάρτη 2010
12. B. van der Pol: *Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance (reception with reactive triode)*, The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science Ser.7, 3, 65-80, 1927.
13. B. van der Pol and J. van der Mark: *The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart*. The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science Ser.7, 6, 763-775, 1928.