ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

"ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΧΑΟΣ: ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΟΥ ΕΛΚΥΣΗ LORENZ ΜΕ ΤΗΝ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΕΛΕΥΘΕΡΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ EASY JAVA SIMULATION"

ΤΡΟΜΠΟΥΚΗ ΑΝΑΣΤΑΣΙΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΕΣ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ

ΧΙΤΖΑΝΙΔΗ ΙΩΑΝΝΑ

ΛΙΑΠΕΡΔΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΤΕΙ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ Τ.Ε.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Deterministic Nonperiodic Flow[1]

EDWARD N. LORENZ

Massachusetts Institute of Technology

(Manuscript received 18 November 1962, in revised form 7 January 1963)

ABSTRACT

Finite systems of deterministic ordinary nonlinear differential equations may be designed to represent forced dissipative hydrodynamic flow. Solutions of these equations can be identified with trajectories in phase space. For those systems with bounded solutions, it is found that nonperiodic solutions are ordinarily unstable with respect to small modifications, so that slightly differing initial states can evolve into considerably different states. Systems with bounded solutions are shown to possess bounded numerical solutions.

A simple system representing cellular convection is solved numerically. All of the solutions are found to be unstable, and almost all of them are nonperiodic.

The feasibility of very-long-range weather prediction is examined in the light of these results.

Εικόνα 1: Η πρώτη δημοσίευση του Lorenz στο επιστημονικό περιοδικό journal of the atmosperic sciences to 1962

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΊΑ ΤΟΥ ΧΆΟΥΣ

Ο άνθρωπος πάντα προσπαθούσε να κατανοήσει τη φύση. Αρχικά δεν είχαν τις γνώσεις και τα μέσα για το καταφέρουν όμως με το πέρασμα των χρόνων έχουν γίνει όλο και μεγαλύτερα βήματα στην κατανόηση των νόμων σε όλους τους τομείς των επιστημών. Με τις επιστημονικές γνώσεις και τον εξοπλισμό που πλέον διαθέτουμε μπορούμε να δούμε πως στους νόμους της φύσης δεν υπάρχουν τυχαίες παράμετροι διότι ακόμη και τα συστήματα που φαίνονται να έχουν τυχαία αποτελέσματα υπακούν στους νόμου του χάους.

Ένα από τα μεγάλα ερωτήματα που απασχόλισε τον άνθρωπο είναι η κίνηση των ουράνιων σωμάτων. Μετά από χρόνια παρατηρήσεων ο Johannes Kepler, ο οποίος σπούδασε θεολογία και φιλοσοφία, έχοντας στη κατοχή του της σημειώσεις του Τύχωνα με ακριβέστατα παρατηρησιακά δεδομένα επί των θέσεων των πλανητών διατύπωσε τους νόμους της κίνησης των πλανητών. Οι οποίοι γίνονται δεκτοί μέχρι σήμερα. Όπου :

1. Νόμος των ελλειπτικών τροχιών: Οι πλανήτες περιφέρονται περί τον Ήλιο σε ελλειπτικές τροχιές, των οποίων ο Ήλιος καταλαμβάνει τη μία από τις δύο εστίες.

2. Νόμος των ίσων εμβαδών: Η επιβατική ακτίνα (η γραμμή που ενώνει ένα πλανήτη με το κέντρο του Ήλιου) σε ίσους χρόνους σαρώνει ίσα εμβαδά. Ο λόγος είναι ότι ο κάθε πλανήτης κινείται ταχύτερα όταν βρίσκεται κοντά στο περιήλιο (το σημείο της τροχιάς ενός σώματος που βρίσκεται στην μικρότερη απόσταση από τον ήλιο) της τροχιάς του από ό,τι κοντά στο αφήλιο (το σημείο της τροχιάς με την μεγαλύτερη απόσταση από τον ήλιο).

3. Νόμος των περιόδων: Το τετράγωνο του χρόνου που απαιτείται για να συμπληρώσει ένας πλανήτης μία πλήρη περιφορά γύρω από τον Ήλιο είναι ανάλογο του κύβου του μεγάλου ημιάξονα της ελλειπτικής του τροχιάς, και η σταθερά της αναλογίας είναι η ίδια για όλους τους πλανήτες.

Παράλληλα πραγματοποιήθηκε ένα μνημειώδες επίτευγμα, η ανάπτυξη του διαφορικού λογισμού (η μελέτη του ορισμού, των ιδιοτήτων και των εφαρμογών της παραγώγου μιας συνάρτησης) από τον Isaac Newton. Ο Newton στη συνέχεια με βάση το νόμο της παγκόσμιας έλξη ότι δηλαδή, οι ελκτικές δυνάμεις μεταξύ δύο ουρανίων σωμάτων είναι ανάλογες του γινομένου των μαζών τους και αντιστρόφως ανάλογες του τετραγώνου της μεταξύ των κέντρων μάζας τους απόστασης, απέδειξε τους τρεις νόμους του Kepler. Αυτά που ήταν αποτελέσματα παρατηρήσεων προέκυπταν πλέον ως λύσεις διαφορικών εξισώσεων. Κατ' αποτέλεσμα η κίνηση των ουράνιων σωμάτων μπορούσε πλέον να προβλεφθεί. Οι νόμοι του Νεύτωνα ως αποτέλεσμα διαφορικών εξισώσεων είναι ντετερμινιστικοί. Δηλαδή για κάθε αιτία υπάρχει ένα και μοναδικό αποτέλεσμα.

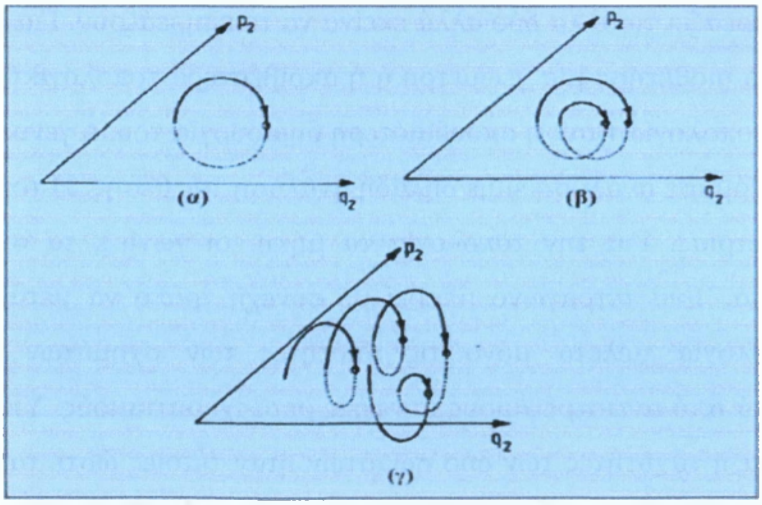
Για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα με την χρήση των διαφορικών εξισώσεων μοντελοποιήθηκαν φαινόμενα σε πολλούς τομείς των επιστημών. Έτσι δημιουργήθηκε η εικόνα ενός κόσμου όπου όλα υπακούουν σε αιτιοκρατικούς νόμους. *Ο Pierre Simon Laplace οραματίστηκε το 1814 το Δαίμονα του Laplace, έναν υποθετικό δαίμονα που, αν γνώριζε την ακριβή θέση του κάθε ατόμου στο σύμπαν, τότε θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει τους νόμους του Νεύτωνα για να αποκαλύψει όλη την πορεία των κοσμικών γεγονότων, του παρελθόντος και του παρόντος: Αν θεωρηθεί για μια στιγμή ότι υπάρχει μια νοημοσύνη ικανή να κατανοήσει όλες τις δυνάμεις που κινητοποιούν τη φύση, καθώς και την αντίστοιχη κατάσταση των όντων που τη συνθέτουν, θα περιέκλειε στον ίδιο μαθηματικό τύπο τις κινήσεις των μεγαλύτερων ατόμων. Αφού γι' αυτήν τίποτα δε θα ήταν αβέβαιο, το μέλλον, όπως ακριβώς και το παρελθόν, θα φάνταζε στα μάτια της ως παρόν.** Όμως ένας τέτοιος κόσμος δεν αντικατοπτρίζει τον πραγματικό κόσμο. Στην πραγματικότητα κανένα επιστήμονας δεν είχε πιστέψει το δόγμα του Laplace καθώς κανένα ακόμη και τα προσεκτικά μελετημένα εργαστηριακά πειράματα δεν θα μπορούσαν να είναι εντελώς απομονωμένα από τις επιδράσεις του περιβάλλοντος. Αυτό που αποδέχονταν είναι πως αν γνωρίζουμε προσεγγιστικά τις αρχικές συνθήκες τότε μπορούμε να υπολογίσουμε προσεγγιστικά τη συμπεριφορά του συστήματος.

*Από το βιβλίο "ο δαίμων του Laplace"

1.1 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

Ένα από τα μεγάλα προβλήματα που μέχρι σήμερα έχει επιλυθεί μόνο αριθμητικά είναι το πρόβλημα της αμοιβαίας αλληλεπίδρασης πολλαπλών σωμάτων. Το πρόβλημα αυτό έμελλε να δώσει το πρώτο "χτύπημα" στην ντετερμινιστική λογική που επικρατούσε. Με το πρόβλημα αυτό ασχολήθηκε και ο Henri Poincaré με αφορμή ένα διαγωνισμό που είχε προκηρύξει το 1889 ο βασιλιάς της Σουηδίας Όσκαρ ο δεύτερος για την καλύτερη εργασία για την σταθερότητα του ηλιακού μας συστήματος. Ο Henri Poincaré ήταν ένας από τους κορυφαίους μαθηματικούς και θεωρητικούς φυσικούς της εποχής και είχε ασχοληθεί με όλα τα μέχρι τότε γνωστά επιστημονικά πεδία. Ό Henri Poincaré για να μελετήσει το πρόβλημα αυτό επέλεξε την πιο απλή εκδοχή του το απλοποιημένο μοντέλο του Hill. Δηλαδή την ύπαρξη 3 σωμάτων που κινούνται σε ένα επίπεδο. Όπου το ένα σώμα έχει μάζα τόσο μικρή ώστε να μην επηρεάζει τα άλλα δύο αλλά εκείνα να το επηρεάζουν. Για να μελετήσει το σύστημα αυτό υιοθέτησε μία γεωμετρική ή ακριβέστερα τοπολογική προσέγγιση. Για κάποιους η τοπολογία ήταν η σπουδαιότερη δημιουργία του, η γενική μελέτη της συνέχειας την ονόμασε ανάλυση situs δηλαδή ανάλυση της θέσης. Η τοπολογία είναι ένα είδος γεωμετρίας. Για την τοπολογία τα μήκη, οι γωνίες, τα σχήματα είναι απείρως ελαστικά. Ένα τετράγωνο μπορεί με συνεχή τρόπο να μεταμορφωθεί σε κύκλο. Η τοπολογία μελετά μόνο τις ιδιότητες των σχημάτων που μένουν αμετάβλητες μετά από αντιστρέψιμους συνεχείς μετασχηματισμούς. Υπέθεσε επίσης πώς οι θέσεις και η ταχύτητες των δύο σωμάτων ήταν τέτοιες ώστε τα δύο σώματα να κινούνται με σταθερή ταχύτητα γύρω από το κέντρο της μάζας τους.

Ο Poincaré υπέθεσε ότι κάποια στιγμή το σύστημα βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη κατάσταση και πως σε κάθε επόμενη στιγμή το σύστημα βρίσκεται στην ίδια ακριβώς κατάσταση. Κατά συνέπεια οι ταχύτητες και οι θέσεις των δύο σωμάτων σε κάθε στιγμή είναι ίδιες. Η μοναδικότητα των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων καθιστά την κίνηση του συστήματος περιοδική. Η περιοδικότητα είναι πολύ χρήσιμος τρόπος για την εξασφάλιση της ευστάθειας. Η ύπαρξη περιοδικών λύσεων εξαρτάται από τις τοπολογικές ιδιότητες που έχει η τωρινή θέση ενός σημείου με την θέση του μετά από μία περίοδο. Αν καταγράψουμε την κατάσταση του συστήματος σαν ένα σημείο καθώς περνά ο χρόνος σχηματίζεται μια καμπύλη. Μετά το πέρας μια περιόδου (μια πλήρης δηλαδή επανάληψη του συστήματος) τότε η καμπύλη αυτή πρέπει να κλείσει. Ο Poincaré απλοποίησε την εύρεση βρόχων χρησιμοποιώντας αυτό που σήμερα ονομάζουμε τομή Poincaré. Με απλά λόγια όταν παρακολουθούμε την τροχιά ενός σώματος γύρω από ένα άλλο αντί να παρακολουθούμε όλη την πορεία του επιλέγουμε ένα επίπεδο (π.χ. Τον μεσημβρινό του Γκρίνουϊτς στη γη) και καταγράφουμε την ταχύτητα και την κατεύθυνση όταν συναντά αυτό το επίπεδο. Αν η κίνηση είναι περιοδική τότε θα πρέπει να τέμνει στο ίδιο ακριβός σημείο με την ίδια κατεύθυνση και την ίδια ταχύτητα.*(Εικόνα 2)*



Η τομή Poincare για (α) περιοδική τροχιά με περίοδο 1. (β) περιοδική τροχιά με περίοδο 2. (γ) χαοτική τροχιά

Εικόνα 2

Επαναλαμβάνοντας πολλές φορές την εισαγωγή του τρίτου σώματος παρατήρησε πώς αλλάζοντας έστω και ελάχιστα είτε την ταχύτητα είτε την αρχική θέση του σώματος τα αποτελέσματα που έπαιρνε ήταν τελείως διαφορετικά. Η τροχιά του συστήματος κάθε φορά που επέστρεφε στην τομή Poincaré έτεμνε το επίπεδο σε άλλο σημείο αλλά κάθε φορά σε διαφορετικό τυχαίο σημείο. Καταλήγοντας έτσι στο συμπέρασμα πώς παρότι οι εξισώσεις που περιγράφουν τις τροχιές των τριών σωμάτων περιγράφονται από μαθητικές εξισώσεις δεν μπορούν να προβλεφθούν. Έτσι ο Henri Poincaré ήταν ο πρώτος που ανακάλυψε ένα χαοτικό σύστημα.

1.2 Το σύστημα Lorenz

Το 1962 ο Saltzman μελετούσε την μεταφορά θερμότητας θερμαίνοντας ένα αέριο στο κάτω μέρος και παρακολουθώντας την μεταφορά της θερμότητας ανέμενε να δει τις δίνες να περιστρέφονται με κάποια περιοδικότητα, όμως κάτι τέτοιο δεν ισχύει. Κατέγραψε τις εξισώσεις και έχοντας μια προσεγγιστική λύση τις αντικατέστησε, αγνοώντας κάποιους μικρούς όρους. Οι εξισώσεις όμως και πάλι ήταν πολύ δύσκολο να επιλυθούν οπότε αποφάσισε να τις βάλει σε ένα υπολογιστή. Παρατήρησε ότι η λύση έδειχνε μη σταθερή μεταφορά θερμότητας. Η μεταφορά θερμότητας τελικά δεν είναι περιοδική όπως αρχικά περίμενε.

Ένα χρόνο αργότερα στο τεχνολογικό ινστιτούτο της Μασαχουσέτης ο Edward Lorenz αποφάσισε να μελετήσει περαιτέρω αυτές τις εξισώσεις. Ο Lorenz πάντα γοητεύονταν από τα μαθηματικά αλλά λόγο των συνθηκών του δευτέρου παγκοσμίου πολέμου έπιασε δουλειά στην υπηρεσία πρόγνωσης καιρού της αεροπορίας του στρατού. Το μηχάνημα που χρησιμοποιούσε για τις μελέτες του ήταν ένα Royal McBee, ένα σύμπλεγμα από καλώδια και λυχνίες κενού. Πρόσεξε πως μόνο τρεις από τις μεταβλητές έπαιζαν ρόλο στο φαινόμενο της μεταφοράς θερμότητας έτσι απομάκρυνε τις υπόλοιπες, καταλήγοντας στο εξής σύστημα εξισώσεων:

$$\frac{dx}{dt}=\sigma x+\sigma y$$

$$\frac{dy}{dt}=rx-y-xz$$

$$\frac{dz}{dt}=bz+xy$$

όπου

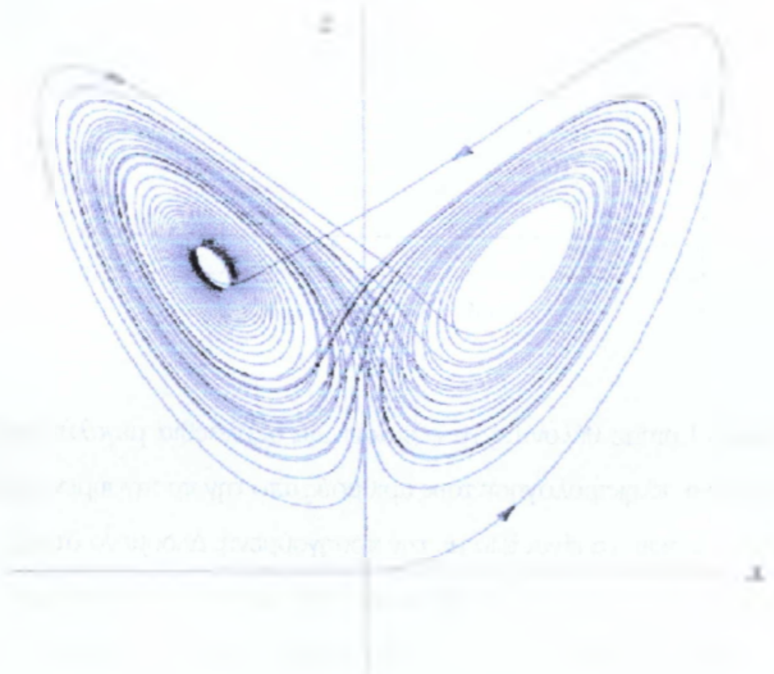
$$\sigma=10$$

$$b=8/3$$

$$r=28$$

$$r-1$$

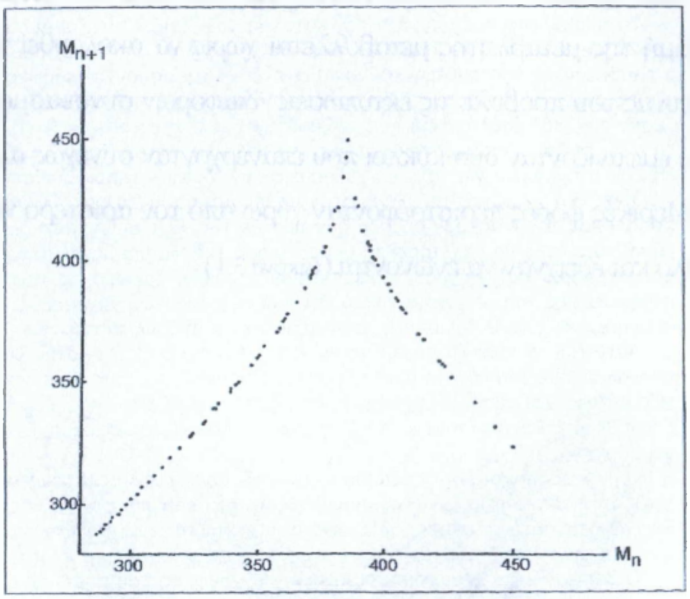
Ο Lorenz έβαλε την μηχανή να τυπώνει ένα ορισμένο αριθμό διαστημάτων ακολουθούμενο από το γράμμα α. Στην αποτύπωση μπορούσε να δει μια κυματώδη γραμμή από α. Μέχρι τις 1.500 περίπου επαναλήψεις η τιμή της μεταβλητής y μεταβάλλεται όπως είχε προβλέψει από την γραμμική ανάλυση ευστάθειας που είχε κάνει, για τις επόμενες 1.500 επαναλήψεις η τιμή της μεταβλητής μεταβάλλεται χωρίς να ακολουθεί κανένα πρότυπο. Στη συνέχεια της έρευνας του πρόβαλε τις εκτυπώσεις διάφορων συνδυασμών των x, y και z. Στο διάγραμμα (x, y) εμφανίζονταν δύο κύκλοι που επανέρχονταν συνεχώς αλλά ποτέ δυο φορές με τον ίδιο τρόπο. Μερικές φορές περιστρέφονταν γύρω από τον αριστερό και μερικές φορές γύρο από τον δεξί κύκλο και έδειχναν να ενώνονται.(Εικόνα 3.1)



Εικόνα 3.1 : Διάγραμμα z, x

Οι τροχιές όμως μιας διαφορικής εξίσωσης είναι αδύνατο να ενώνονται. Κατά συνέπεια αυτό που ο ίδιος έβλεπε σαν ένα κοινό σημείο έπρεπε να είναι δύο σημεία πολύ κοντά το ένα στο άλλο. Το σχέδιο αυτό είναι αρκετά περίπλοκο αλλά συνεχίζει να είναι ένα σχέδιο.

Σε μία άλλη προσπάθειά του να μελετήσει τις εξισώσεις αυτές πήρε τις μέγιστες τιμές της μεταβλητή z και σχεδίασε ένα διάγραμμα για τον τρόπο που σχετίζεται με την προηγούμενη. Το διάγραμμα που πήρε ήταν μια καμπύλη με κορυφή στη μέση. Ουσιαστικά έφτιαξε μια τομή poincare' η οποία υποδηλώνει ένα ρυθμό στο σύστημα. Χρησιμοποιώντας την καμπύλη αυτή μπορούμε να προβλέψουμε μια την επόμενη μέγιστη τιμή του z αρκεί να ξέρουμε την τιμή της προηγούμενης(Εικόνα 2.2).



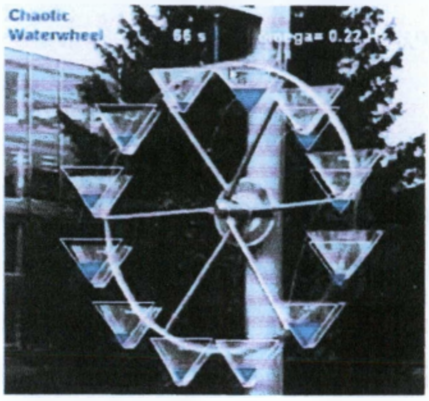
Εικόνα 3.2: Διάγραμμα z, t

Μια μέρα ο Lorenz θέλοντας να εξετάσει μια ακολουθία μεγαλύτερου μήκους αντί να αρχίσει από την αρχή πληκτρολόγησε τους αριθμούς από την προηγούμενη μέτρηση. Κανονικά η νέα εκτέλεση θα έπρεπε να είναι ίδια με την προηγούμενη. Δεδομένο ότι είχε αντιγράψει τους αριθμούς από την ίδια μηχανή. Το πρόγραμμα ήταν ακριβώς το ίδιο χωρίς καμία μεταβολή αφαίρεση ή προσθήκη. Παρατηρώντας την νέα εκτύπωση είδε τον "καιρό" να αποκλίνει τόσο γρήγορα από την μορφή που υπήρχε στην προηγούμενη εκτύπωση ώστε με το πέρας μόνο λίγων μηνών είχε χαθεί κάθε ομοιότητα.

Αρχικά θεώρησε πως κάτι είχε χαλάσει στο μηχάνημα του αλλά μετά συνειδητοποίησε πως το πρόβλημα βρισκόταν στους αριθμούς. Ο Lorenz περνώντας τους αριθμούς από την προηγούμενη εκτύπωση τους είχε πληκτρολογήσει στρογγυλεμένους. Στην πρώτη εκτύπωση ο αριθμός ήταν 0,506127 ενώ στη νέα εκτύπωση 0,506 θεωρώντας πως η ακρίβεια ενός χιλιοστού δε θα επιφέρει αλλαγές. Αποφάσισε να συγκρίνει τις δυο διαφορετικές εξισώσεις τοποθετώντας την μία πάνω στην άλλη αρχικά οι δύο εκτυπώσεις συνέπιπταν μετά άρχισαν να διαφέρουν πολύ λίγο και μετά κάθε ομοιότητα είχε εξαφανιστεί.(Εικόνα 3.3)

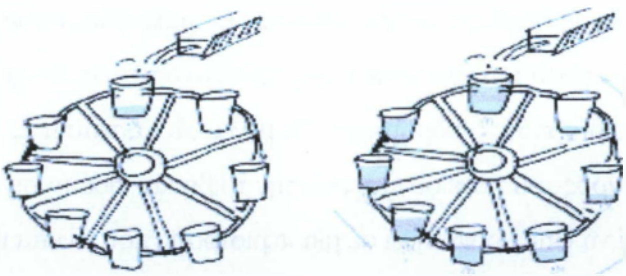
Εικόνα 3.3: Οι δύο γραφικές παραστάσεις πάρα την πολύ μικρή διαφορά στην τιμή μετά από κάποιο χρονικό διάστημα δεν συμπίπτουν.

Ο Lorenz αναζήτησε πιο απλούς τρόπους να παράγει αυτή την πολύπλοκη συμπεριφορά. Βρήκε αυτό που αναζητούσε σε ένα είδος κίνησης των ρευστών. Στην μεταφορά θερμότητας, δηλαδή στην ανύψωση του ζεστού υγρού. Κατασκεύασε λοιπόν ένα υδροτροχό. Αυτή η απλή συσκευή ήταν ικανή να παρουσιάσει εκπληκτικά πολύπλοκη συμπεριφορά. Η κατασκευή αυτή είναι ένας νερόμυλος με δοχεία όπου η πάνω πλευρά είναι ανοιχτή και στην κάτω υπάρχει μία οπή ίσου μεγέθους σε όλα τα δοχεία. Το επάνω δοχείο τροφοδοτείται με νερό με σταθερό ρυθμό. Γεμίζοντας τα δοχεία με σταθερό ρυθμό υπάρχουν οι ακόλουθες περιπτώσεις: Όσο αφορά την πρώτη περίπτωση αν η ροή του υγρού είναι αργή τότε το δοχείο δε θα έχει ποτέ τόσο βάρος ώστε να ξεπεράσει την τριβή οπότε ο υδροτροχός θα μένει πάντα στάσιμος. Αντίθετα αν η ροή είναι γρήγορη τότε το βάρος του δοχείου ξεπερνά την τριβή και τίθεται σε κίνηση. Η ταχύτητα του υδροτροχού μπορεί να σταθεροποιηθεί σε μία περιστροφή που γίνεται με σταθερό ρυθμό. Η μια περίπτωση είναι να εισέλθει σε μία χαοτική κατάσταση διότι αν η ροή είναι πολύ γρήγορη τότε όταν το πρώτο δοχείο έχει τόσο βάρος ώστε να ξεπεράσει την τριβή ο υδροτροχός τίθεται σε κίνηση, κατά συνέπεια το δεύτερο δοχείο έχει λιγότερο χρόνο για να γεμίσει από ότι το πρώτο οπότε θα γεμίσει και με λιγότερο νερό. Το τρίτο καθώς το συνολικό βάρος από την πλευρά της καθόδου μεγαλώνει και η ταχύτητα αυξάνεται θα γεμίσει με ακόμη λιγότερο υγρό. Μια ακόμη περίπτωση είναι, αν η ροή του υγρού είναι πολύ γρήγορη, επειδή τα δοχεία από την πλευρά της ανόδου να είναι πολύ βαριά η περιστροφή αρχικά να επιβραδυνθεί στη συνέχεια να σταματήσει και τελικά θα αναστραφεί. Η περιστροφή συνεπώς μπορεί να αναστραφεί από μόνη της. Η αναστροφή αυτή μπορεί να επαναληφθεί καθώς ρέει το υγρό. Όμως η αναστροφή δεν επαναλαμβάνεται με σταθερό ρυθμό καθώς η ταχύτητα του υδροτροχού όπως προείπαμε δεν είναι σταθερή. Σε αυτό το σύστημα υπάρχει αντιστοιχία με την μεταφορά θερμότητας. Αν η θερμότητα είναι πολύ μικρή δεν ξεπερνά την εσωτερική τριβή και το ρευστό δεν τίθεται σε κίνηση. Αν η θερμότητα ξεπεράσει την εσωτερική τριβή ξεκινά η διαδικασία της μεταφοράς θερμότητας.



Εικόνα 4.1: Υδροτροχός

Εικόνα 4.2: Αυτοσχέδιος υδροτροχός



Εικόνα 4.3: Αριστερά εκκίνηση υδροτροχού. Δεξιά διαφορετικές ποσότητες νερού κατά την πορεία του υδροτροχού.

Το 1964 ο Lorenz παρατήρησε ότι ανάμεσα στις κλιματικές αλλαγές στον καιρό υπάρχει μακροπρόθεσμα μια μέση συμπεριφορά όπως απέδειξε ο Lorenz ο μέσος όρος των τελευταίων 12.000 ετών ήταν σημαντικά διαφορετικός από τον μέσω όρο των προηγούμενων 12.000 ετών. Αναρωτήθηκε αν υπάρχει κάποιο κλίμα όπου αλλάζει σ' ένα άλλο λόγο κάποιων φυσικών αιτιών.

Ή ένα μακρύτερης διάρκειας κλίμα μέσα στο οποίο εκείνες οι περίοδοι αποτελούσαν απλώς διακυμάνσεις; Ή μήπως είναι δυνατόν ένα σύστημα σαν του καιρού να μη συγκλίνει ποτέ σε μία μέση συμπεριφορά; Ο Lorenz άρχισε να μελετά την δευτεροβάθμια εξίσωση. Ο Lorenz δεν είχε την υπολογιστική δύναμη που υπάρχει σήμερα για να εξετάσει τις εξισώσεις. Εξέτασε αρχικά τι συνέβαινε καθώς η εξίσωση επαναλαμβανόταν για διάφορες τιμές παραμέτρων. Όταν οι παράμετροι ήταν μικρές η εξίσωση κατέληγε σε ένα σταθερό σημείο. Όπου στο σημείο αυτό ο καιρός δεν άλλαζε ποτέ. Όταν οι παράμετροι έπαιρναν μεγαλύτερες τιμές εμφανίζονταν η δυνατότητα ταλάντωσης της εξίσωσης ανάμεσα σε δύο σημεία, αλλά και σε αυτή την περίπτωση το σύστημα συνέκλινε σε μια μέση κατάσταση. Πέρα όμως από ένα ορισμένο σημείο ο Lorenz είδε να ακολουθεί χαοτική συμπεριφορά. Όταν η τιμή παραμέτρου μεταβάλλονταν ακόμη και λίγο το μέσο αποτέλεσμα μπορούσε να αλλάξει υπερβολικά. Καθώς συνέχιζε να εξερευνά τα δυναμικά συστήματα, συνειδητοποίησε πως ορισμένα συστήματα λιγότερο περίπλοκα αυτών που απεικονίζει η δευτεροβάθμια εξίσωση διαφορών μπορούσαν να παράγουν άλλα είδη απρόσμενων μορφών. Μέσα σε ένα συγκεκριμένο σύστημα ένα παρατηρητής μπορούσε να διαπιστώνει ένα είδος συμπεριφοράς για μεγάλο χρονικό διάστημα, αλλά ταυτόχρονα ένα άλλο διαφορετικό είδος συμπεριφοράς μπορεί να είναι εξίσου φυσιολογικό για το σύστημα. Ένα τέτοιο σύστημα λέγετε αμετάβατο. Το σύστημα αυτό μπορεί να παραμείνει είτε στη μια είτε στην άλλη κατάσταση ισορροπίας αλλά όχι και στις δύο. Μόνο μία εξωτερική ώθηση μπορεί να το αναγκάσει να μεταβεί από την μια στην άλλη κατάσταση. Ο Lorenz περιέγραψε άλλο ένα είδος συμπεριφοράς που ονομάζεται σχεδόν αμετάβατο. Ένα σχεδόν αμετάβατο σύστημα εμφανίζει για ένα πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα κάποιο είδος μέσης συμπεριφοράς η οποία κυμαίνεται μέσα σε ορισμένα όρια και στη συνέχεια χωρίς κανένα προφανή λόγο μεταβαίνει σε ένα διαφορετικό είδος συμπεριφοράς. Το οποίο επίσης κυμαίνεται γύρω από μία άλλη μέση τιμή. Ή συμπεριφορά αυτών των σχεδόν αμετάβατων συστημάτων είναι ιδιαίτερα απρόβλεπτη.

Οι επιστήμονες συνειδητοποίησαν πως σε αιτιοκρατικά δυναμικά συστήματα, η δυνατότητα γέννησης χάους (μη προβλεψιμότητας) παραμονεύει σε κάθε λεπτομέρεια. Άρχισαν λοιπόν να μελετούν το χάος στην εφαρμοσμένη επιστήμη. Έτσι βρέθηκε μια εκπληκτική τάξη στο χάος που αναπτύσσεται στην ανθρώπινη καρδιά, την κύρια αιτία του απρόσμενου θανάτου. Ερευνήθηκε η εμφάνιση και εξαφάνιση νομαδικών πληθυσμών εντόμων. Εξετάστηκαν οι τιμές προϊόντων συναρτήσει επιρροών που φαίνονται μηδαμινές. Εξετάστηκε το σχήμα των νεφών, οι διαδρομές των αστραπών στον αέρα. Ερευνήθηκε η ομαδοποίηση των άστρων σε γαλαξίες. Και η εφαρμογή του συνεχώς διευρύνεται από την διαστημική έως τη δυναμική των υγρών, τις ακτίνες laser έως τις χημικές αντιδράσεις, από τις τηλεπικοινωνίες (λευκός θόρυβος της γραμμής) έως την νευροφυσιολογία. Αλλά τελευταία ενδιαφέρει τους μουσικούς, τους συγγραφείς, τους ψυχαναλυτές και τους εικαστικούς.

Η ονομασία Θεωρία του Χάους δόθηκε από τον μαθηματικό του Πανεπιστημίου του Maryland Jim York μόλις το 1975. Η θεωρία του χάους μελετά σύνθετα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα. Η έννοια δυναμικά υποδηλώνει μη σταθερότητα και μη περιοδικότητα. Υπάρχει ο ισχυρισμός ότι δεν είναι μια ενοποιημένη θεωρία, αλλά μια μαθηματική πλατφόρμα πάνω στην οποία μπορούν να αναπτυχθούν ερμηνείες φαινομένων. Τα βασικά συστατικά του μαθηματικού χώρου που χρησιμοποιεί η θεωρία του χάους είναι οι αναπαραστάσεις φαινομένων σε πολυδιάστατους χώρους, η μη γραμμική συμπεριφορά, η αναδρομή και η επαναστατικότητα. Σημαντική μαθηματική οντότητα της περιγραφής των χαοτικών συστημάτων είναι οι παράξενοι ελκυστές.

1.3 ΕΛΚΥΣΤΕΣ

Ένας ελκυστής είναι κάτι προς το οποίο το σύστημα τείνει ασυμπτωτικά. Η ουσία ενός ελκυστή είναι ότι αποτελεί μέρος του χώρου των φάσεων τέτοιο ώστε κάθε σημείο του που ξεκινά από μία κοντινή θέση με την πάροδο του χρόνου να πλησιάζει όλο και πιο κοντά σε αυτό. Ένας ελκυστής δεν μπορεί να διασπαστεί σε δύο μικρότερα υποσύνολα που το κάθε ένα να δικαιολογεί τον ορισμό.

Στον μέχρι τώρα γνωστό θεσεογραφικό χώρο περιγράφαμε την κίνηση ενός σωματιδίου σε ένα χώρο τόσων διαστάσεων όσοι είναι οι βαθμοί ελευθερίας που απαιτούνται για να καθοριστεί πλήρως η θέση αυτού. Όπου βαθμός ελευθερίας ενός συστήματος είναι ο αριθμός των συντεταγμένων που απαιτούνται για να καθοριστεί η θέση του συστήματος ενός ή περισσοτέρων σωμάτων σε κάποιο χώρο. Για παράδειγμα, ένα σωματίδιο σε ένα μονοδιάστατο κόσμο παρουσιαζόταν ως ένα σημείο πάνω σε μια ευθεία, ενώ η κίνηση του σωματιδίου στο χώρο την παριστάνουμε με μια καμπύλη στον τρισδιάστατο χώρο με παράμετρο το χρόνο. Φυσικά, αν το σύστημα απαρτίζεται από δύο ή περισσότερα σωματίδια, η κίνησή του στο θεσεογραφικό χώρο περιγράφεται από τόσες καμπύλες όσα και τα σωματίδια.

Ο χώρος τον φάσεων είναι ένας χώρος όπου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγραφεί η κίνηση ενός μηχανικού συστήματος. Ένας χώρος αποτελούμενος από τη θέση και την αντίστοιχη ορμή (το γινόμενο της μάζας του σώματος επί το ρυθμό αλλαγής της αντίστοιχης θέσης) για κάθε βαθμό ελευθερίας του συστήματος.

Η βασική διαφορά του χώρου των φάσεων από τον θεσεογραφικό χώρο είναι πως για ένα σύστημα αποτελούμενο από πολλά σωματίδια περιγράφεται στον χώρο των φάσεων από μία καμπύλη αφού για τον κάθε βαθμό ελευθερίας του κάθε σωματιδίου υπάρχει το αντίστοιχο ζεύγος μεταβλητών θέση και ορμής. Η καμπύλη αυτή ονομάζεται καμπύλη φάσης.

Ο χώρος των φάσεων εμπεριέχει πολύ περισσότερες πληροφορίες όσον αφορά την κίνηση του συστήματος. Παρατηρώντας μια καμπύλη στο χώρο των φάσεων μπορούμε να γνωρίζουμε πλήρως την ιστορία του συστήματος καθώς η αρχική θέση και η αρχική ταχύτητα ενός σωματιδίου είναι αρκετά για να καθοριστεί πλήρως η εξέλιξη του, από κάθε σημείο του χώρου των φάσεων δεν μπορεί παρά να περνά μία και μόνο μία καμπύλη. Οι δυνατές πορείες ενός σωματιδίου και γενικότερα ενός μηχανικού συστήματος, στο χώρο των φάσεων δεν είναι δυνατόν να τέμνονται.

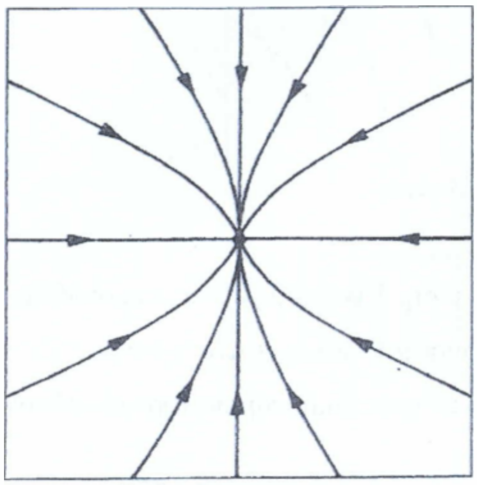
Με δεδομένη αντίστοιχα μία μόνο διαφορική εξίσωση μπορούμε να αντιληφθούμε την κίνηση όλων των δυνατών αρχικών σημείων. Σε ένα σύστημα με δύο βαθμούς ελευθερίας μπορούμε σε ένα επίπεδο να σχεδιάσουμε την κίνηση την οποία ακολουθούν τα σημεία αυτά. Διαλέγοντας ένα σημείο εκκίνησης μπορούμε να σχεδιάσουμε τις λύσεις αυτής της διαφορικής εξίσωσης με αυτή την αρχική συνθήκη. Η εικόνα που δείχνει πώς συνδυάζονται αυτές οι γραμμές ροής ονομάζεται πορτραίτο φάσεων της εξίσωσης.

Μελετώντας τον τρόπο μεταβολής μιας περιοχής καθώς εξελίσσεται στο χρόνο σε κάποια συστήματα παρατηρείται ότι κατά την χρονική εξέλιξη πλησιάζουν και τελικά προσεγγίζουν μια συγκεκριμένη περιοχή του χώρου αυτού. Η περιοχή αυτή ανάλογα με το σύστημα μπορεί να είναι ένα σημείο, μία καμπύλη, μια επιφάνεια ή γενικά μια δομή στο χώρο. Αυτή η γεωμετρική δομή ονομάζεται ελκυστής του συστήματος. Το σύνολο των αρχικών τιμών όπου παρητηρείται η έλξη ονομάζεται βάση έλξης. Οι ελκυστές χωρίζονται σε δύο κατηγορίες στους χαοτικούς (παράξενους ελκυστές) ή μη χαοτικούς. Η εξέλιξη των μη χαοτικών ελκυστών μπορεί να προβλεφθεί για οποιοδήποτε χρονικό διάστημα.

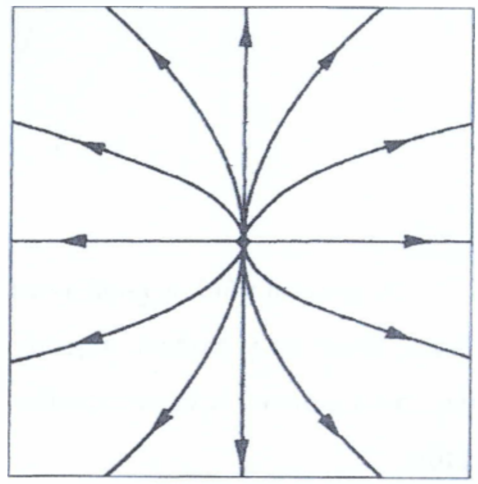
Ο Poincaré και ένα Σουηδός μαθηματικός ο Ivan Bendixson απέδειξαν ένα θεώρημα σύμφωνα με το οποίο τυπικά υπάρχουν μόνο τέσσερις τύποι συμπεριφοράς που εμφανίζονται σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Φυσικά αυτό δεν ισχύει για κάθε διαφορική εξίσωση γι΄ αυτό και χρησιμοποιείται ο όρος τυπικά. Οι τύποι αυτοί είναι οι καταβόθρες , οι πηγές, οι σέλες και οριακοί κύκλοι.

Η καταβόθρα είναι το μέρος που μια γραμμή ροής γίνεται σημείο προς το οποίο “ρέουν” όλα τα γειτονικά σημεία(Εικόνα 5.1). Η καταβόθρα αντιπροσωπεύει μια μόνιμη κατάσταση του συστήματος. Η μόνιμη κατάσταση του συστήματος είναι ευσταθής.

Οι πηγές είναι επίσης μόνιμες καταστάσεις μόνο που στην περίπτωση των πηγών τα γειτονικά σημεία απομακρύνονται(Εικόνα 5.2). Η μόνιμη κατάσταση εδώ είναι ασταθής.

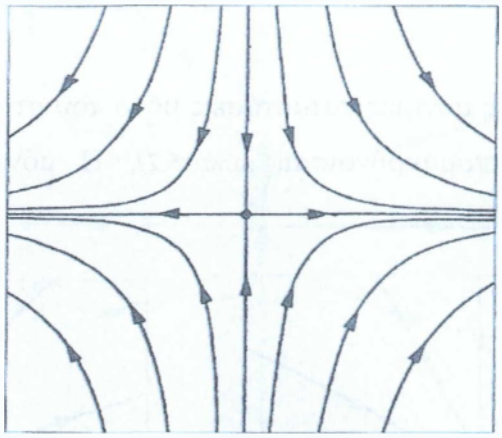


Εικόνα 5.1: Καταβόθρα



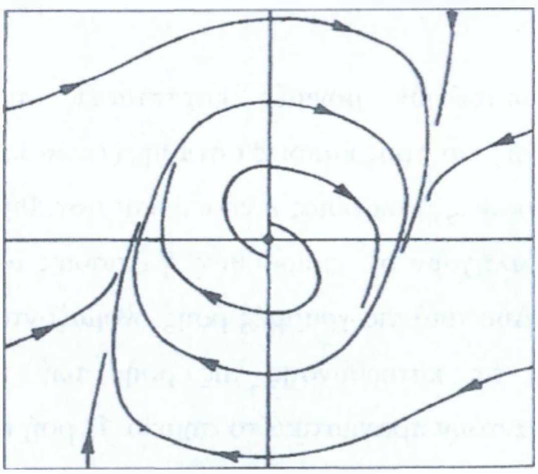
Εικόνα 5.2: Πηγή

Οι σέλλες αποτελούν μόνιμες καταστάσεις που είναι προς κάποιες κατευθύνσεις ευσταθής και προς κάποιες ασταθής (*Εικόνα 5.3*). Η θέση είναι ευσταθής όσο αφορά τις εμπρόσθιες ή οπίσθιες κινήσεις και ασταθής όσο αφορά τις πλάγιες. Το σημείο όπου καταλήγουν οι εμπρόσθιες ή οπίσθιες μετακινήσεις αποτελεί μια μόνιμη κατάσταση. Δύο από τις γραμμές ροής ονομάζονται διαχωριστές της σέλας επειδή διαχωρίζουν τις κατεύθυνσης της ροής των γειτονικών σημείων. Οι διαχωριστές δεν συναντούν πραγματικά το σημείο. Η ροή κοντά σε μία σέλα γίνεται απείρως αργή.



Εικόνα 5.3: Σέλα

Οι οριακοί κύκλοι χωρίζονται σε δύο είδη. Ένα είδος είναι ο ευσταθής οριακός κύκλος όπου τα γειτονικά σημεία κατευθύνονται προς αυτόν (Εικόνα 5.4). Το άλλο είδος είναι ο ασταθής οριακός κύκλος όπου τα γειτονικά σημεία απομακρύνονται από αυτόν.



Εικόνα 5.4: Ευσταθής οριακός κύκλος

Το 1927 ο Ολλανδός ηλεκτρολόγος μηχανικός Balthasar Van der Pol καθώς μελετούσε την διάδοση των ραδιοκυμάτων και των συσκευών που χρειάζονται για την παραγωγή εκπομπή και λήψη τους ανακάλυψε έναν εξαιρετικής σημασίας οριακό κύκλο. Ο οποίος εμφανίζεται στο μαθηματικό μοντέλο μια ηλεκτρονικής λυχνίας ενός μη γραμμικό ταλαντωτή οπού πήρε και το όνομα του.

Η βασική εξίσωση αυτού του ταλαντωτή είναι:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon(x^2-1)\frac{dx}{dt}+x=E(t)$$

Η χρησιμότητα της εξίσωσης Van der Pol έγκριτε στο γεγονός πως έχει πλήθος εφαρμογών. Χρησιμοποιείται από μηχανικούς φυσικούς και μαθηματικούς. Στο σύστημα αυτό παρατηρείται μια μορφή θορύβου κατά τη διέλευση του συστήματος από διαδοχικές περιοχές υποπολλαπλάσιον συχνότητας.

Ένας άλλος τρόπος που χρησιμοποιείται συχνά από τους επιστήμονες για την απεικόνιση των ελκυστικών είναι η απεικόνιση επαναφοράς ή απεικόνιση poincare. Η απεικόνιση poincare αφαιρεί μια διάσταση από τον ελκυστή και μετατρέπει μια συνεχή γραμμή σε ένα μία ομάδα σημείων. Η διαδικασία αυτή αντιστοιχεί στη δειγματοληπτική καταγραφή της κατάστασης ενός συστήματος. Το πότε θα γίνει η δειγματοληψία εξαρτάται από τον ερευνητή που θα επιλέξει το χρονικό διάστημα που του δίνει περισσότερες πληροφορίες.

2 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Οι διάφοροι παράμετροι συμπεριφοράς ενός συστήματος μπορούν να οριστούν σαν διαστάσεις. Υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερις διαστάσεις, οι τρεις διαστάσεις του χώρου όπου συνήθως συμβολίζονται σαν x,y,z και ο χρόνος ο οποίος συνήθως συμβολίζεται σαν t. Για κάποια συστήματα είναι δυνατόν να υπάρχουν και περισσότερες (π.χ. Τριβή, βάρος κ.ά.). Όσο περισσότερες είναι οι παράμετροι που αλλάζουν σε ένα σύστημα που παρατηρούμε τόσο περισσότερες είναι και οι διαστάσεις του χώρου που χρειαζόμαστε για να το αναπαραστήσουμε μαθηματικά.

Γραμμικά θεωρούνται τα συστήματα για τα οποία ισχύει το άθροισμα δύο λύσεων τους κι είναι αυτο λύση. Σαν λύση θεωρούμε την δυνατότητα να μπορούμε να γνωρίζουμε σε κάποιο καθορισμένο χρόνο την κατάσταση του συστήματος. Στα μη γραμμικά συστήματα αυτό δε συμβαίνει για αυτό και είναι πολύ δύσκολο να επιλυθούν.

Κάθε σύστημα έχει είσοδο και έξοδο. Όταν ανατροφοδοτούμε το αποτέλεσμα της διαδικασίας στην είσοδο, τότε έχουμε ανάδραση, οπότε το αποτέλεσμα επηρεάζει την νέα έκβαση του συστήματος. Ένα χαρακτηριστικό των εξισώσεων του χάους είναι η επαναληπτικότητα. Για να μπορέσουμε να αντιληφθούμε την κατάσταση του συστήματος η διαδικασία πρέπει να επαναληφθεί πολλές φορές. Και θα πρέπει να γνωρίζουμε τα αποτελέσματα των προηγούμενων επαναλήψεων ώστε να μπορούμε να τα συγκρίνουμε.

Αρχικά θα δούμε αυτό που ονομάζεται λογιστική απεικόνιση. Ας θεωρήσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα με μήκος ίδιο με μία μονάδα. Κάθε σημείο αυτού του τμήματος αναπαριστάται με μία τιμή x ανάμεσα στο 0 και στο 1 όπου μας δίνει την απόσταση του σημείου από το αριστερό άκρο του τμήματος με τιμή 0,0. Η λογιστική του απεικόνιση είναι η εξής:

$$x_{(n+1)} \rightarrow kx_n(1-x_n)$$

όπου το k είναι μια σταθερά ανάμεσα στο 0 και στο 4 για το παράδειγμά μας.

Μπορούμε να θεωρήσουμε πως ο χρόνος κυλά με ακαριαίο βήμα. Ο χρόνος δηλαδή περνά από την μία κατάσταση στην επόμενη με βήμα ακαίρεων αριθμών. Αυτό ονομάζεται διακριτή δυναμική.

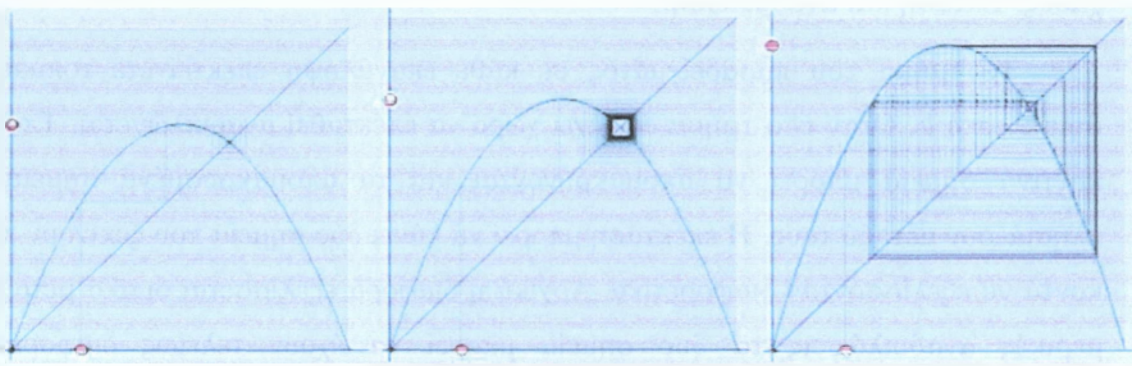
Τα δυναμικά συστήματα αποτελούνται από την κατάστασή τους, της πληροφορίες που μας δίνουν για το σύστημα και την δυναμική, τον κανόνα δηλαδή που περιγράφει πως εξελίσσετε η κατάσταση στον χρόνο. Με την επαναληπτικότητα της λογιστικής απεικονίσεις μπορούμε να δούμε ένα από τα κύρια ¨συστατικά" του χάους. Έκταση και αναδίπλωση.

Το τμήμα του παραδείγματός σε κάθε επανάληψη επεκτείνετε τοπικά με συντελεστή k. Όταν στο τμήμα δεν έχει χώρο να επεκταθεί αναδιπλώνεται. Έτσι τα κοντινά σημεία μπορεί να απομακρύνονται και τα απομακρυσμένα σημεία να πλησιάζουν μεταξύ τους. Η επέκταση μπορεί να κάνει δύο σημεία που ξεκινούν πολύ κοντά να εξελίσσονταν διαφορετικά. Αρχικά η διαφορά εξελίσσεται ομαλά μετά από μερικές αναδιπλώσεις τα δυο σημεία μπορεί να έχουν τελείως διαφορετική συμπεριφορά Αυτή ακριβώς η διαδικασία είναι που προκαλεί την χαοτική συμπεριφορά ενός συστήματος, καθώς και ότι δεν μπορούμε να γνωρίζουμε ακριβώς τις αρχικές συνθήκες και ακόμη και ένα πολύ μικρό σφάλμα στις μετρήσεις το οποίο λόγω της εκθετικής απόκλισης των τροχών του συστήματος μεγενθύνεται και η προβλεψιμότητα των τιμών χάνεται μετά από μερικές επαναλήψεις. Επιπλέον ακόμη και αν γνωρίζαμε ακριβώς την αρχική συνθήκη, λόγω καθαρά υπολογιστικών προβλημάτων, είναι αδύνατη μια μακρόχρονη πρόβλεψη επειδή καθώς οι προβλεπόμενες τιμές θα αυξάνονται ο υπολογιστής είναι υποχρεωμένος να εκτελεί πράξεις με αριθμούς που αποτελούνται από συνεχώς αυξανόμενα ψηφία, το οποίο είναι πρακτικά αδύνατο. Έτσι σε κάποιο σημείο της διαδικασίας λόγω αποκοπής ψηφίων θα υπεισέλθει ένα μικρό σφάλμα το οποίο πάλι θα αυξάνει εκθετικά σε σχέση με τον χρόνο με αποτέλεσμα την απώλεια της πρόβλεψης.

Για να μελετήσουμε την δυναμική της λογιστικής απεικόνισης πρέπει να επαναλάβουμε την απεικόνιση αρκετές φορές ώστε να δούμε τι συμβαίνει στο x μετά από κάθε επανάληψη.

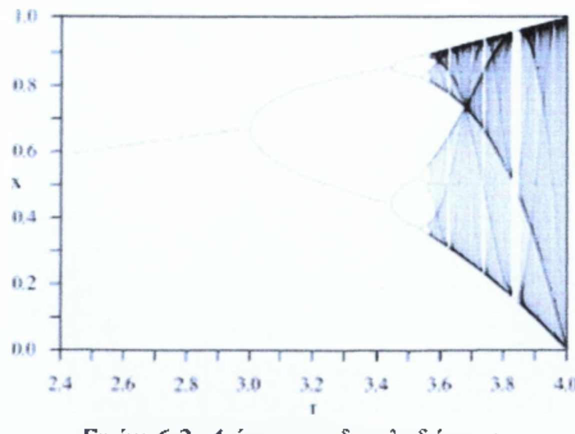
Για k από 0 μέχρι 3 υπάρχει ένα καθεστώς μόνιμης κατάστασης. Καθώς όσο κυλά ο χρόνος για όλες τις τιμές του k από 0 μέχρι 3 το x μεταβάλλεται ώσπου φτάνει σε κάποια τιμή στην οποία και παραμένει σε μια ευσταθή μόνιμη κατάσταση. Υπάρχει δηλαδή ένας σημειακός ελκυστής.

Η ευστάθεια αυτή εκτός από υπολογιστικά μπορούμε να την δούμε και με την κατασκευή ενός ιστογράμματος.



Εικόνα 6.1: Στην πρώτη εικόνα μπορούμε να δούμε την μόνιμη κατάσταση, στην δεύτερη το σημείο παροδικότητας και στην τρίτη το χάος.

Όταν η τιμή του k είναι ίση με 3 τότε έχουμε ένα οριακά ευσταθές σημείο. Ο τρόπος για να μπορέσουμε να δούμε που θα καταλήξει η ασταθής τροχιά του συστήματος είναι η χρήση της θεωρίας διακλαδώσεων. Αν αυξήσουμε λίγο την τιμή του k η τιμή του x_t μεταπηδά μεταξύ δύο τιμών. Το σύστημα μας αρχίζει να ταλαντεύεται πλέον στο διάγραμμα βλέπουμε ένα κύκλο με περίοδο δύο. Αν αυξήσουμε λίγο ακόμη το k έχουμε ένα κύκλο με περίοδο τέσσερα. Χρειάζεται να αυξήσουμε όλο και λιγότερο την τιμή του k για να δούμε την περίοδο να διπλασιάζεται. Στο $k=3.56$ η περίοδος έχει διπλασιαστεί άπειρες φορές, η λογιστική απεικόνιση γίνεται χαοτική. Όμως αν αυξήσουμε το k μας πολύ αργά θα πάρουμε και περιόδους που δεν είναι πολλαπλάσια του 2. Οι οποίες επαναλαμβάνονται επ' αόριστον. Μέσα στη χαοτική απεικόνιση μπορούμε να δούμε κάποια κομμάτια κανονικής συμπεριφοράς. Που οφείλεται αυτή η κανονική συμπεριφορά μέσα στο χάος μπορούμε να το γνωρίζουμε χάρη τον Ρώσο μαθηματικό A.N. Sharkovskii. Αν για μία δεδομένη τιμή του k η λογιστική απεικόνιση έχει ένα κύκλο με περίοδο p τότε θα πρέπει να είχε προηγούμενους κύκλους με περιόδους q για όλα τα q τα οποία συμβαίνει $p \rightarrow q$ σύμφωνα με την διάταξη αυτή. Ο λόγος p/q ονομάζεται αριθμός περιστροφής. Αξίζει να σημειωθεί πως η διάταξη αυτή ισχύει για τις επαναλήψεις κάθε απεικόνισης που έχει ένα μόνο μέγιστο και όχι μόνο για τις επαναλήψεις της λογιστικής απεικόνισης. Αυτό είναι μία ένδειξη πως κάποιες μορφές χάους ίσως δεν είναι εξειδικευμένες σε μεμονωμένα παραδείγματα αλλά αντιπροσωπευτικές για ολόκληρες κατηγορίες συστημάτων. Για να πάρουμε λοιπόν μία συνολική άποψη της συνολικής δυναμικής συμπεριφοράς της λογιστικής απεικόνισης για όλες τις τιμές του k σε ένα διάγραμμα δημιουργούμε ένα διάγραμμα διακλαδώσεων. Ένα διάγραμμα διακλαδώσεων σχεδιάζεται ως εξής. Σχεδιάζοντας ένα γράφημα με το k να διατρέχει την οριζόντια διεύθυνση και το x την κατακόρυφη. Πάνω σε κάθε τιμή του k σημειώνουμε τις τιμές του x οι οποίες βρίσκονται πάνω στον ελκυστή για το συγκεκριμένο k. Η διαδικασία αυτή μας δίνει μία καμπύλη. Καθώς το k προχωρά στο διπλασιασμό της περιόδου η καμπύλη διαχωρίζεται (Εικόνα 6.2). Αποκτώντας μορφή δένδρου το οποίο ονομάζεται σύνολο Feigenbaum από τον εφευρέτη της Mitchell Feigenbaum.



Εικόνα 6.2: Διάγραμμα διακλαδώσεων

Όταν το k πάρει την τιμή 3,58 το σύνολο Feigenbaum έχει άπειρες διακλαδώσεις. Οι διακλαδώσεις αυτές σχηματίζουν ζώνες χαοτικών ελκυστών. Κάθε τόσο υπάρχει μέσα στην εικόνα μία λεπτή λευκή λωρίδα που έχει ελάχιστες μικρές κουκκίδες στο εσωτερικό της. Αυτά είναι τα παράθυρα των τιμών των τιμών της παραμέτρου k για τα οποία έχουμε περιοδικές τροχός. Κάθε παράθυρο περιέχει υποσύνολα Feigenbaum τα οποία περιέχουν τις δικές τους ζώνες χάους με λευκές λωρίδες οι οποίες εμπεριέχουν υποσύνολα Feigenbaum και ούτω καθεξής. Στην πραγματικότητα το κάθε παράθυρο περιέχει ένα ακριβές αντίγραφο ολόκληρης της εικόνας. Το χαρακτηριστικό αυτό ονομάζεται αυτοομοιότητα.

2.1 Μέθοδοι επίλυσης μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων

Πολλά σημαντικά προβλήματα στην μηχανική, στις θετικές αλλά και στις κοινωνικές επιστήμες, όταν σχηματοποιούνται με μαθηματικούς όρους, απαιτούν τον προσδιορισμό μιας συνάρτησης που ικανοποιεί μια εξίσωση που περιέχει τις παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης. Οι συναρτήσεις που περιέχουν παραγώγους μίας άγνωστης συνάντησης ονομάζονται διαφορικές εξισώσεις.

Η μεγαλύτερη από τις τάξεις των παραγώγων που εμφανίζονται στην εξίσωση ονομάζεται τάξη της διαφορικής εξίσωσης. Κάθε συνάρτηση y = f(x) που επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση λέγεται λύση της εξίσωσης. Το σύνολο όλων των λύσεων μιας διαφορικής εξίσωσης λέγεται γενική λύση της εξίσωσης.

Οι διαφορικές εξισώσεις διακρίνονται σε

- Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, στις οποίες η άγνωστη συνάρτηση είναι συνάρτηση μίας μόνο ανεξάρτητης μεταβλητής.
- Διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, στις οποίες η άγνωστη συνάρτηση είναι συνάρτηση δύο ή περισσοτέρων ανεξαρτήτων μεταβλητών.

Κάθε μια από αυτές τις κατηγορίες διαιρείται σε γραμμικές και μη γραμμικές υποκατηγορίες.

- Μια διαφορική εξίσωση λέγεται γραμμική όταν η εξαρτημένη μεταβλητή και όλες οι παράγωγοί της εμφανίζονται στη δύναμη 1 και δεν υπάρχουν γινόμενα ή συναρτήσεις της εξαρτημένης μεταβλητής.

Ο γενικός τύπος των γραμμικών εξισώσεων είναι:

$$\frac{dx}{dy}=P(x)\,y=Q(x)$$

και εάν $Q(x)=0$ τότε

λέγεται ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση.

Και έχει γενική λύση $y=ce^{-\int P(x)dx}$

- Αν υπάρχουν γινόμενα ή συναρτήσεις της εξαρτημένης μεταβλητής η διαφορική εξίσωση λέγεται μη γραμμική.

Και αντίστοιχα η εξίσωση

$$\frac{dy}{dt}=y^2$$

είναι μη γραμμική.

Για τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις υπάρχει γενικός τύπος όμως αυτό δεν ισχύει για της μη γραμμικές. Κατά συνέπεια δεν μπορούμε να γνωρίζουμε αν υπάρχει λύση και αν υπάρχει αν αυτή είναι μοναδική και πιο το μέγιστο διάστημα ορισμού της. Οι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις είναι δύσκολο να επιλυθούν και για κάποιος τύπους μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δεν υπάρχει λύση. Για τον λόγω αυτό αρκετές φορές προσεγγίζουμε την επίλυση χρησιμοποιώντας κάποιες άλλες συναρτήσεις οι οποίες είναι πιο εύκολο να επιλυθούν. Βέβαια στις προσεγγίσεις αυτές θα πρέπει πάντα να λαμβάνεται υπόψιν το σφάλμα που υπάρχει. Όσο μικρότερο είναι το σφάλμα τόσο καλύτερη και η προσέγγισή. Οι απλούστερες συναρτήσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν είναι τα πολυώνυμα καθώς οι αριθμητικοί υπολογισμοί τους είναι σχετικά εύκολοι και έχουν παραγώγους κάθε τάξης και η ολοκλήρωσή τους είναι απλή και δίνει πάλι πολυώνυμο. Ακόμη μερικές φορές δεν μας ενδιαφέρει τόσο η επίλυση της εξίσωσης αλλά η τιμή της κάποιες χρονικές στιγμές. Ένα σύνολο (x_i, y_i) που προσεγγίζει την λύση της εξίσωσης και διέρχεται από το σημείο των αρχικών συνθηκών ονομάζεται αριθμητική λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Για αυτό το είδος εξισώσεων υπάρχουν πολλοί τρόποι επίλυσης οι μέθοδοι που θα αναφέρουμε είναι αυτές των μαθηματικών Eurel και Rugge-Kutta τις οποίες παραθέτω πιο κάτω.

2.1.1 Μέθοδος Euler

Η μέθοδος Euler αφορά την επίλυση σύνηθων διαφορικών εξισώσεων με δεδομένη την αρχική τιμή. Η μέθοδος Euler είναι μια πρώτης τάξης μέθοδος, που σημαίνει ότι το τοπικό σφάλμα (σφάλμα ανά βήμα) είναι ανάλογο με το τετράγωνο του μεγέθους βήματος, και ολικό σφάλμα (σφάλμα σε μια δεδομένη στιγμή) είναι ανάλογο με το μέγεθος του βήματος. Πάσχει επίσης από προβλήματα σταθερότητας. Για τους λόγους αυτούς, η μέθοδος δεν χρησιμοποιείται συχνά στην πράξη. Χρησιμεύει ως βάση για την κατασκευή πιο πολύπλοκων μεθόδων.

Στο σημείο Σ_0 με συντεταγμένες (x_0, y_0) υπολογίζουμε την $y'=f(x_0, y_0)$. Ο αριθμός $f(x_0, y_0)$ καθορίζει τη διεύθυνση της καμπύλης $y=y(x)$ στο σημείο (x_0, y_0).

Η εξίσωση της εφαπτομένης της λύσης στο σημείο (x_0, y_0) είναι :

$y=y_0+(x-x_0)f(x_0, y_0)$

υπολογίζουμε την τιμή της γραμμικής αυτής συνάρτησης για $x=x_1=x_0+h$ όπου h θετική σταθερά:

$y_1=y_0+hf(x_0, y_0)$

επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία στο σημείο (x_1, y_1) και η εξίσωση της αντίστοιχης εφαπτομένης της ζητούμενης λύσης είναι:

$y=y_1+(x-x_1)f(x_1, y_1)$ υπολογίζουμε την τιμή του y για $x=x_2=x_1+h$ και έχουμε $y_2=y_1+hf(x_1, y_1)$

επαναλαμβάνοντας την διαδικασία προκύπτει η ακολουθία των σημείων (x_{n+1}, y_{n+1}) όπου :

$x_{n+1}=x_n+h, y_{n+1}=y_n+hf(x_n, y_n)$

Ενώνοντας τα σημεία (x_n, y_n) με ευθύγραμμα τμήματα παίρνουμε προσεγγιστικά την μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης $y=f(x, y)$ που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη (x_0, y_0).

2.1.2 Μέθοδος Runge-Kutta

Η μέθοδος Runge – Kutta είναι μια κλασική μέθοδος με πολύ καλή ακρίβεια και χρησιμοποιείται ευρύτατα.

Οι τεχνικές αυτές αναπτύχθηκαν από περίπου το 1900 από τους μαθηματικούς Runge και Kutta. Πρόκειται για οικογένεια μεθόδων ενός βήματος και όπως και η μέθοδος Euler εξαρτάται μόνο από την πληροφορία που αντλείται μέσα από το συγκεκριμένο βήμα. Η απλούστερη είναι η μέθοδος Runge-Kutta 2^{ης} τάξης που δίνεται από την σχέση:

$$y_{i+1}=y_i+(\frac{h}{2})[f(x_i,yi)+f(x_{i+1},y_i)]$$

η οποία προκύπτει εφαρμόζοντας την μέθοδο Euler δύο φορές.

Υπολογίζουμε την ενδιάμεση τιμή η οποία θα έχει την τιμή

$y'_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i)$ και στη συνέχεια την τελική τιμή

$$y_{i+1}=y_i+(\frac{h}{2})[f(x_i,yi)+f(x_{i+1},y'_i)]$$

και συνοψίζεται στον αλγόριθμο

$$k_1=f(x_1,y_1)$$

$$k_i=f(x_i+h,y_i+hk_1)$$

$$y_{i+1}=y_i\frac{h}{2}(k_1+k_2)$$

με i=0,1,...

Η μέθοδος επίλυσης που θα χρησιμοποιήσουμε στην προσομοίωση είναι η Runge-Kutta 4ης τάξης όπου η γενική μορφή είναι

$$y_{i+1}=y_i+h(ak_1+bk_2+ck_3+dk_4)$$

όπου k1, k2 k3 k4 οι οι προσεγγιστικές τιμές του $\frac{dy}{dx}$ δε διαφορετικά σημεία του υποδιαστήματος $[x_i, x_i+h]$.

και οι αλγόριθμοι είναι οι εξής:

$$k_1=f(x_i, y_i)$$

$$k_2=f(x_i+\frac{h}{2}, yi\frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3=f(x_i+\frac{h}{2}, yi\frac{h}{2}k_4)$$

$$k_4=f(x_i+\frac{h}{2}, yi\frac{h}{2}k_3)$$

$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$ καθώς και οι εξής:

$$k_1=f(x_i, y_i)$$

$$k_2=f(x_i+\frac{h}{3}, y_i+\frac{h}{3}k_1)$$

$$k_3=f(x_i+\frac{2h}{3}, y_i+\frac{2h}{3}k_2)$$

$$k_4=f(x_i+h, y_i+hk_3)$$

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{8}(k_1+3k2+3k_3+k_4)$$

το συσσωρευμένο σφάλμα της μεθόδου Runge-Kutta είναι αντίστοιχο με την τάξη της μεθόδου.

2.2 Εκθέτες Lyapunov

Μια χαρακτηριστική ιδιότητα των χαοτικών συστημάτων είναι η μεγάλη ευαισθησία τους από τις αρχικές συνθήκες. Δύο τροχιές που μπορεί να έχουν τις ίδιες αρχικές συνθήκες αρχικά είναι σχεδόν ταυτόσημες με την πάροδο του χρόνου γίνονται γειτονικές και στην πορεία αποκλίνουν εκθετικά. Ακόμη και πολύ μικρές διαταραχές μεγενθύνονται ραγδαία επιρεάζοντας την πορεία του συστήματος. Όσο αφορά τους μη χαοτικούς ελκυστές οι γειτονικές τροχιές παραμένουν πλησίον η μια στην άλλη και οι μικρές διαταραχές δεν αυξάνονται. Η μελέτη του φάσματος των εκθετών Lyapunov είναι από τα πλέον χρήσιμα εργαλεία για να αποφανθούμε αν ένα δυναμικό σύστημα είναι χαοτικό ή όχι. Ένα δυναμικό σύστημα *n* διαστάσεων έχει *n* εκθέτες Lyapunov, που περιγράφουν την δράση της δυναμικής που προσδιορίζει την εξέλιξη των τροχιών στο χώρο των φάσεων. Οι εκθέτες Lyapunov εκφράζουν τον μέσο ρυθμό σύγκλισης ή απόκλισης δύο γειτονικών τροχιών στο χώρο των φάσεων.
Ο εκθέτης Lyapunov συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα λ μπορεί να υπολογιστεί αμέσως για μία μονοδιάστατη απεικόνιση όπως η λογιστική απεικόνιση. Αν ένα σύστημα μπορεί να εξελιχθεί από δύο διαφορετικές αρχικές καταστάσεις x και $x+\varepsilon_0$ μετά από μία σειρά n επαναλήψεων η απόκλιση των δύο καταστάσεων δίνεται προσεγγιστικά από τον τύπο:

$$\varepsilon(n) \approx \varepsilon_0 x \lambda n$$

όπου ο εκθέτης Lyapunov δίνει την μέση τιμή του ρυθμού απόκλισης. Αν ο εκθέτης Lyapunov είναι αρνητικός τότε ελαφρά διαχωρισμένες τροχιές συγκλίνουν και η εξέλιξη του συστήματος δεν οδηγεί σε χαοτική συμπεριφορά. Αν ο εκθέτης Lyapunov είναι θετικός τότε οι γειτονικές τροχιές αποκλίνουν η εξέλιξη του συστήματος είναι ευαίσθητη στις αρχικές συνθήκες και το σύστημα οδηγείται σε χαοτική συμπεριφορά. Ένα δυναμικό σύστημα είναι χαοτικό όταν έχει τουλάχιστον ένα θετικό εκθέτη Lyapunov. Η ύπαρξη τουλάχιστον ενός θετικού εκθέτη Lyapunov συνεπάγεται εκθετική απόκλιση δύο γειτονικών τροχιών κατα συνέπεια δεν μπορεί να προβλεθφεί η συμεριφορά του συστήματος μετά απο μικρό χρονικό διάστημα. Όσο μεγαλύτερος είναι ο εκθέτης Lyapunov σε μια περιοχή ενός δυναμικού συστήματος τόσο μικρότερη είναι η προβλεψιμότητα σε αυτή την περιοχή. Αν η δυναμική ενός συστήματος περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις τότε αποδεικνύεται ότι ένας εκθέτης θα είναι μηδέν, που αντιστοιχεί σε μια διαταραχή κατά μήκος του διανυσματικού πεδίου που εφάπτεται της τροχιάς.

Τα πρόσημα των εκθετών Lyapunov δίνουν μια ποιοτική εικόνα της δυναμικής ενός συστήματος. Σε ένα τρισδιάστατο χώρο φάσεων οι πιθανοί τύποι ελκυστών και τα αντίστοιχα φάσματα αυτών είναι:

α) οριακό σημείο με φάσμα (-,-,-)

β) οριακός κύκλος με φάσμα (0,-,-)

γ) Διδιάστατος τόρος με φάσμα (0,0,-)

δ) Παράξενος ελκυστής με φάσμα (+,0,-)

Όταν ένα χαοτικό σύστημα έχει δύο ή περισσότερους θετικούς εκθέτες Lyapunov τότε χαρακτηρίζεται από υπερχάος.

Οι τιμές των εκθετών Lyapunov μας δίνουν μια ποσοτική εικόνα της δυναμικής του ελκυστή του συστήματος, καθώς μετρούν τον ρυθμό με τον οποίο το σύστημα δημιουργεί ή καταστρέφει μία πληροφορία. Κατά συνέπεια οι εκθέτες Lyapunov εκφράζονται σε bits ανά τροχιά

Ένα άλλο ποσοτικό χαρακτηριστικό όπου μπορούμε να μελετήσουμε την χαοτική συμπεριφορά ενός συστήματος είναι η εντροπία. Χαρακτηριστικό των χαοτικών συστημάτων είναι η απώλεια πληροφορίας, με την πάροδο του χρόνου. Καθώς μειώνεται η δυνατότητα πρόβλεψης των χαοτικών συστημάτων λόγω της εκθετικής απόκλισης τους και της σταθερής ταχύτητας με την οποία η πληροφορία χάνεται. Ένα μέγεθος που χαρακτηρίζει τον ρυθμό απώλεια της πληροφορίας είναι η εντροπία Kolmogorov. Η οποία συνδέεται άμεσα με τους εκθέτες Lyapunov. Αν γνωρίζουμε τους εκθέτες Lyapunov ενός συστήματος μπορούμε να υπολογίσουμε την εντροπία Kolmogorov και αντίστροφα.

Ένας άλλο ποσοτικό χαρακτηριστικό ενός δυναμικού χαοτικού συστήματος είναι η διάσταση του ελκυστή. Ό υπολογισμός της μας επιτρέπει την εκτίμηση του χώρου τον οποίο καταλαμβάνει ο ελκυστής του συστήματος στον χώρο των φάσεων.

2.3 Fractal

Ένα πολύ σημαντικό και όμορφο κομμάτι της θεωρίας του χάος αποτελούν τα fractals (μορφόκλασμα ή μορφοκλασματικό σύνολο).Τα fractals, είναι μαθηματικά αντικείμενα αλλά τα συναντάμε και στη φύση. Είναι σύνολα σημείων στις γραφικές παραστάσεις κάποιων εξισώσεων, που η δομή τους εμφανίζει μιά επανάληψη. Ο όρος "φράκταλ" προέρχεται από το λατινικό fractio (θραύσμα, κομμάτι), λόγω της κλασματικής διάστασής του, και πρωτοχρησιμοποιήθηκε από τον Γάλλο μαθηματικό Benoit Mandelbrot το 1975 ο οποίος έθεσε το ερώτημα "πόσο μεγάλη είναι η ακτογραμμής της Βρετανίας; " Η απάντηση εξαρτάται από την κλίμακα του χάρτη που χρησιμοποιούμε για να μετρήσουμε την ακτογραμμή. Όσο πιο πολλές λεπτομέρειες έχει ο χάρτης τόσο πιο μεγάλη τιμή για την ακτογραμμή προκύπτει. Ο λόγος αυτής της παράξενης ιδιότητας είναι ότι η ακτογραμμή είναι ένα fractal.

Κύριο χαρακτηριστικό ενός φράκταλ είναι ότι όσο κι αν μεγεθυνθεί και απομονωθεί ένα τμήμα του, αυτό το τμήμα παρουσιάζει την ίδια μορφή, φαίνεται δηλαδή ίδιο με το συνολικό φράκταλ. Το φαινόμενο αυτό ονομάστηκε αυτοομοιότητα (self-similarity) από τον καθηγητή Benoit Mandelbrot. Τα fractal δεν έχουν μέγεθος μέτρησης όπως τα ευκλείδεια σχήματα. Η θεωρία των fractal είναι αυτό που ονομάζουμε τάξη μέσα στην αταξία δέχεται ότι τόσο ο φυσικός κόσμος όσο και ο κόσμος των μαθηματικών είναι χαοτικός αλλά ότι μερικές φορές μέσα σε αυτή την "αταξία" υπάρχει μια άπειρα πολύπλοκη τάξη.

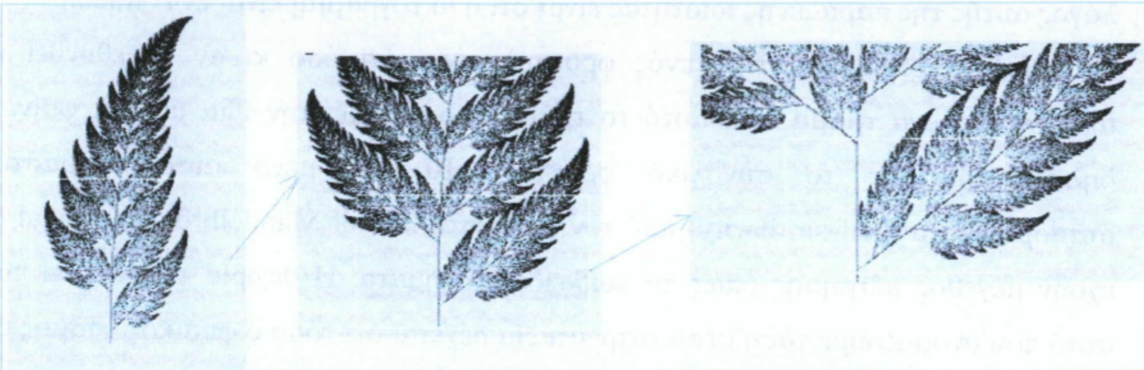
Τα fractal χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες

- Ακριβής αυτοομοιότητα. Το fractal φαίνεται όμοιο σε διαφορετικές κλίμακες, ακόμη και σε πολύ μικρές. Για να δημιουργηθεί ένα ακριβές αυτοόμοιο fractal επαναλαμβάνεται συνεχώς μια διαδικασία. Ακριβής αυτοομοιότητα παρουσιάζει η νιφάδα του Koch.
- Οιονεί αυτοομοιότητα. Όπου το fractal εμφανίζεται περίπου αλλά όχι ακριβώς το ίδιο σε διαφορετικές κλίμακες. Είναι συνήθως fractal που ορίζονται από

αναδρομικές σχέσεις. Ένα παράδειγμα τέτοιου είδους fractal είναι το σύνολο Mandelbrot.

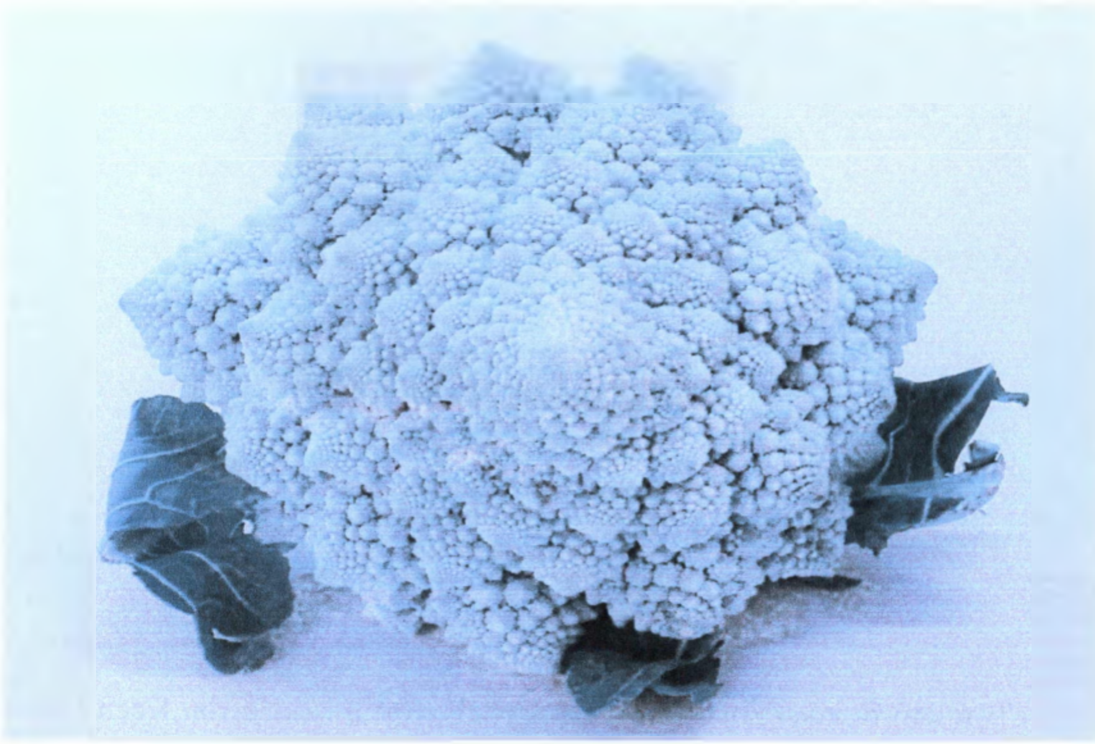
- Στατιστική αυτοομοιότητα. Το fractal έχει αριθμητικά ή στατιστικά μέτρα που εμφανίζονται σε όλο το fractal με διαφορετικά μέτρα. Αυτό το είδος είναι και το πιο αδύναμο. Ένα παράδειγμα είναι η ακτογραμμή της μεγάλη Βρετανίας.

Κάποια παραδείγματα αυτοομοιότητας στη φύση είναι το κουνουπίδι και η φτέρη. Η φτέρη ανήκει στην κατηγορία των φυτών που εκδηλώνουν την ιδιότητα της αυτοομοιότητας με τον καλύτερο τρόπο. Μια φτέρη αποτελείται από φύλλα καθένα από τα οποία αποτελείται από πολλά μικρότερα. Και αυτά ακόμα τα μικρά φύλλα αποτελούνται από ακόμα μικρότερα που διατηρούν την ίδια δομή με τη φτέρη (Εικόνα 7.1). Η στοιχειώδης μοντελοποίηση μιας φτέρης μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη χρήση ενός υπολογιστικού περιβάλλοντος. Ένα μικρό πρόγραμμα που περιλαμβάνει πολλαπλές αναδρομικές κλήσεις.



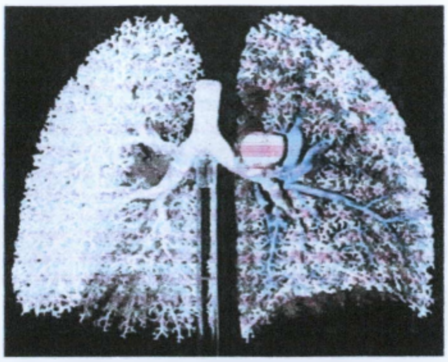
Εικόνα 7.1. Φτέρη, τα φύλλα της φτέρης αποτελούνται από μικρότερα ίδια φύλλα.

Το κουνουπίδι αποτελεί ένα κλασικό παράδειγμα, ένα υβρίδιο που εντοπίστηκε για πρώτη φορά στην Ιταλία τον 16^{o} αιώνα. Ολόκληρο το κουνουπίδι σχηματίζεται από μικρότερα αντίγραφα του ίδιου παραταγμένα σπειροειδώς .Καθένα από αυτά αποτελείται με την σειρά του από αλλά μικρότερα αντίγραφα επίσης παραταγμένα σπειροειδώς . Αν κόψουμε ένα ανθύλλιο από το κουνουπίδι θα έχουμε ένα κουνουπίδι μικρότερου μεγέθους αλλά ίδιας δομής με το αρχικό. Και αν το κόψουμε ξανά και ξανά θα συνεχίζουμε να παίρνουμε μικρότερα κουνουπίδια ακριβώς ίδιας δομής με το αρχικό. (Εικόνα 7.2)



Εικόνα 7.2: Κουνουπίδι, ένα φυσικό fractal

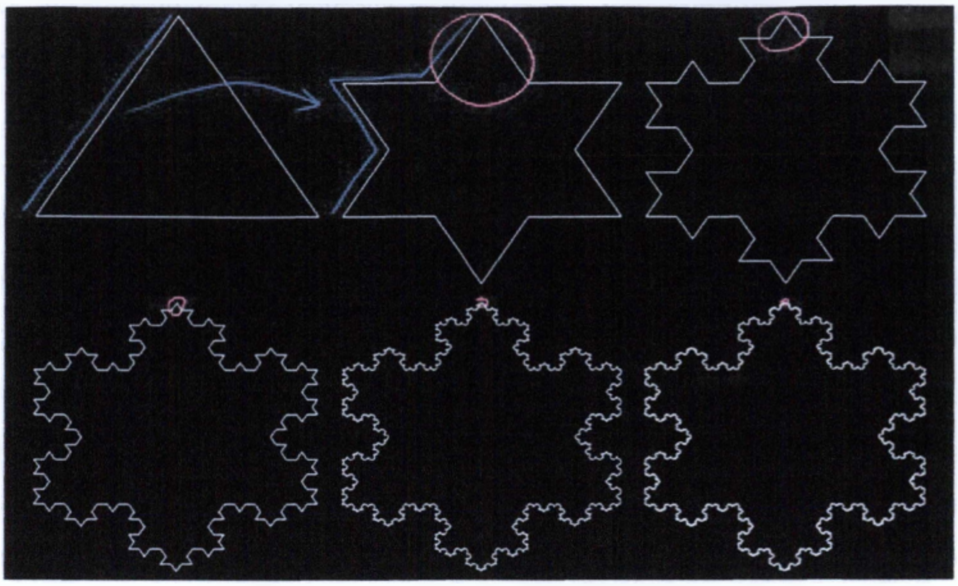
Fractal υπάρχουν ακόμη και στο ανθρώπινο σώμα τέτοια είναι ο πνεύμονας και τα νεφρά. Η μελέτη της θεωρίας των fractal είχε βοηθήσει αρκετά την ιατρική όσον αφορά στα συγκεκριμένα όργανα. Τα fractal φαίνεται να καταλαμβάνουν πάρα πολύ μεγάλη επιφάνεια. Αυτό εξηγεί γιατί τα fractal είναι σημαντικά όσον αφορά διάφορες βιολογικές περιπτώσεις όπου το μέγεθος της επιφάνειας είναι κρίσιμης σημασίας. Παίρνουμε για παράδειγμα τους ανθρώπινους πνεύμονες (*Εικόνα 7.3*). Η επιφάνεια των πνευμόνων, αν αυτούς τους απλώσουμε, θα μπορούσε να καταλάβει ένα γήπεδο του τένις. Αποτελούνται από βρόγχους που διακλαδίζονται αρκετές φορές σε μικρότερους και παρουσιάζουν αυτόομοιότητα.



Εικόνα 7.3

Ανθρώπινος πνεύμονα, αποτελείται από βρόγχους οι οποίοι παρουσιάζουν αυτοομοιότητα

Ένα από τα πολύ γνωστά τεχνητά fractal είναι η νιφάδα του Koch *(Εικόνα 7.4)*. Ό σχηματισμός της είναι αρκετά απλός. Ξεκινώντας από ένα ισόπλευρο τρίγωνο προσθέτουμε στις πλευρές του ακριβώς στη μέση τρία άλλα ισόπλευρα τρίγωνα με πλευρές 1/3 του αρχικού τριγώνου. Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία δημιουργούμε διαδοχικά την νιφάδα. Κάθε καινούρια νιφάδα έχει όλο και μεγαλύτερη περίμετρο αλλά το εμβαδόν της δεν ξεπερνά ποτέ το εμβαδόν του περιγεγραμμένου κύκλου του αρχικού τριγώνου.



Εικόνα 7.4: Κατασκευή της νιφάδας του Koch

Δομές fractal έκτος από σχηματικές συναντάμε και σε άλλους τομείς όπως στις λειτουργίες του ανθρώπινου εγκεφάλου η μνήμη, στη δομή της κοινωνίας και την ανάπτυξη της οικονομίας.

Τα τελευταία χρόνια μελετάται η χρήση των fractal σε πολλούς τομείς. Ό πρώτος μελετητής τους ο Benoit Mandelbrot έχει εκδώσει αρκετά βιβλία και έχει ανοίξει το δρόμο για την χρήση τους σε πολλούς τομείς όπως η γεωλογία, η ιατρική, η αστρονομία, η μηχανολογία, η μετεωρολογία, καθώς και τα οικονομικά και η ανατομία. Το βιβλίο του με τίτλο <<*Ο Πίνακας του Χάους. Γιατί καταρρέουν οι αγορές;*>> το οποίο έγραψε μαζί με τον Richard Hudson αφορά τα fractals σε σχέση τους χρηματιστηριακούς δείκτες και την παγκόσμια οικονομία. Οι προβλέψεις του με την χρήση των μοντέλων fractal είναι πολύ ακριβής. Το βιβλίο έχει πάρα πολλές πωλήσεις και η γενική θεωρία του χρησιμοποιείται από πολλούς επενδυτές και επιχειρηματίες.

Οι διαφορετικές μορφές που μπορεί να πάρει ένα fractal περιγράφονται με μαθηματικούς τύπους που ονομάζονται, μετασχηματισμοί fractal (fractal transformations). Οι μετασχηματισμοί αυτοί χρησιμοποιούνται για την δημιουργία εικόνων στον κινηματογράφο σε video games. Τα τελευταία χρόνια μελετάται η χρήση τους για συμπίεση και αποσυμπίεση εικόνων. Χωρίζοντας την εικόνα σε μικρά τμήματα στη συνέχεια, αναζητούνται περιοχές της εικόνας που μπορούν να προκύψουν, με ικανοποιητική ακρίβεια, με μετασχηματισμό fractal κάποιου τμήματος. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για όλα τα τμήματα της εικόνας. Στόχος είναι να περιγραφεί αυτή η εικόνα με ένα σύνολο τέτοιων μετασχηματισμών των μικρών τμημάτων που θα καταλαμβάνουν πολύ λιγότερο χώρο από την αρχική εικόνα. Ένα ακόμη χαρακτηριστικό είναι πως οι εικόνες παρουσιάζονται ως όριο ενός τελεστή χωρίς να γίνεται αναφορά στην κλίμακα της εικόνας ή στο μέγεθος της ως προς τον αριθμό των εικονοστοιχείων. Κατά συνέπεια ο fractal κώδικας μπορεί να αποκωδικοποιηθεί σε οποιαδήποτε ανάλυση παρουσιάζοντας λεπτομέρειες της εικόνας. Η λεπτομέρεια όμως αυτή είναι τεχνητή και δεν αναπαριστά κάποια πραγματική λεπτομέρεια της αρχικής εικόνας. Αυτό όμως δεν αποτελεί τόσο πρόβλημα όσο όφελος καθώς πρώτον οι εικόνες που προκύπτουν από fractal δομές φαίνονται πιο φυσικές από εικόνες που προκύπτον μετά από την αντιγραφή εικονοστοιχείων κατά την διαδικασία συμπίεσης και αποσυμπίεσης. Ο δεύτερος λόγος είναι πως η μέθοδος αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο "ενίσχυσης" μια εικόνας. Δηλαδή μπορούμε να συμπιέσουμε μια εικόνα με όχι και τόσο καλή ανάλυση με την χρήση μετασχηματισμών fractal και να την αποσυμπιέσουμε παίρνοντας μια εικόνα υψηλότερης ανάλυσης. Οι ειδικοί ευελπιστούν ότι μπορεί να επιτύχει λόγους συμπίεσης της τάξης 1000:1. Ενώ η αποσυμπίεση γίνεται αρκετά εύκολα το μειονέκτημα είναι ότι η συμπίεση απαιτεί μεγάλη υπολογιστική ισχύ .

Τα fractals χρησιμοποιούνται επίσης στη μουσική. Η δυνατότητα χρήσης των fractal μεθόδων για να δημιουργήσουμε μουσική αναφέρθηκε για πρώτη φορά μετά την ανακάλυψη ότι όλα τα αρχεία μουσικής, ανεξάρτητα από τον πολιτισμό, ακολουθούν τα πρότυπα των fractals κινήσεων ή «ροζ θορύβων». Ροζ θόρυβος είναι κάπου ανάμεσα σε λευκό θόρυβο (πλήρες χάος, πολύ άτακτη για να θεωρηθεί μουσική) και καφέ θόρυβο (πολύ ομαλή, και πάρα πολύ θαμπό να ακούγεται σαν μουσική). Υπάρχουν δύο μέθοδοι για δημιουργήσουμε μουσική με fractal μουσική.

- Η πρώτη μέθοδος ονομάζεται L-Systems. Η μέθοδος αυτή, δημιουργεί την αυτο-ομοιότητα των φρακταλς, αρχίζοντας με μια σύντομη σειρά από σύμβολα και την αντικατάσταση των συμβόλων με τους αντίστοιχους κανόνες.

- Η δεύτερη μέθοδος περιλαμβάνει φρακταλ κίνηση. Ροζ θόρυβος παράγεται με διάφορες μεθόδους τυχαίων αριθμών, ξεκινώντας με μια ευθεία γραμμή και επανειλημμένα μεταβάλλοντας τμήματα της γραμμής.

Οι fractal σχηματισμοί είναι πολύ όμορφοι και ήταν φυσικό να επηρεάσουν τις τέχνες. Κλασικό παράδειγμα είναι ο ζωγράφος Jackson Pollock ο οποίος επινόησε την τεχνική του dripping. Ο Pollock τοποθετούσε στο πάτωμα τον καμβά του και έσταζε με χαοτικό τρόπο την μπογιά στο καμβά του. Έτσι οι πίνακες του αποκτούσαν fractal δομή. Ο βαθμός πολυπλοκότητας μάλιστα των έργων του, που εμφανίζουν αυτή την ιδιαίτερη συμμετρία κλίμακας μετράται με τη fractal διάσταση (κατόπιν επεξεργασίας με υπολογιστή) η οποία αυξάνει συνεχώς από κάθε έργο του στο επόμενο.

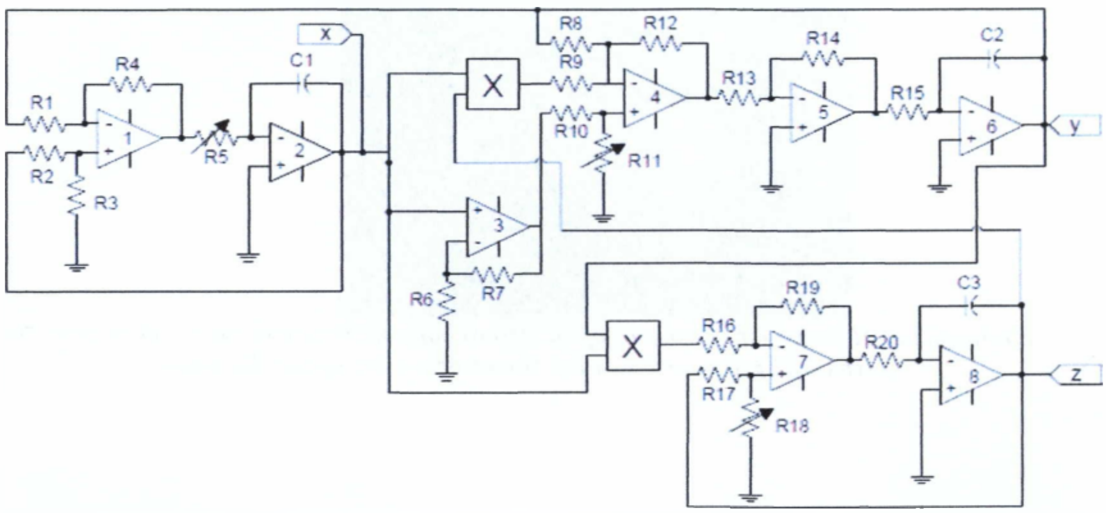
Εικόνα 7.5: Eyes in the Heat, 1946 Jackson Pollock

3 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

3.1 ΚΡΥΠΤΟΓΡΑΦΙΑ

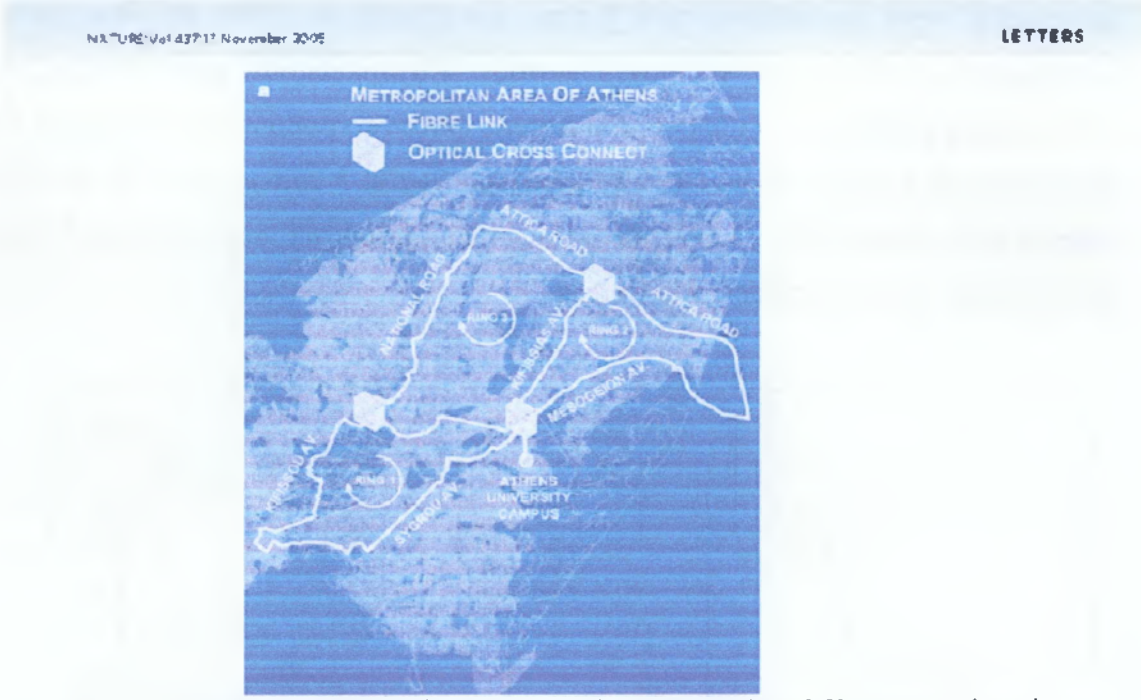
Ένα μεγάλο πρόβλημα το ημερών είναι η υποκλοπή πληροφοριών από τα δίκτυα. Ο τομέας της κρυπτογραφίας συνεχώς εξελίσσεται όμως κάθε φορά ένας άνθρωπος ή μια άλλη ομάδα καταφέρνει να αποκωδικοποιήσει την πληροφορία και ο κάθε τρόπος κρυπτογράφησης με τη σειρά του καθίσταται ξεπερασμένος. Την λύση σε αυτό το πρόβλημα ίσως μας την δώσει το χάος. Και αυτή η πιθανή λύση ονομάζεται χαοτική κρυπτογράφηση. Αυτή τη λύση λοιπόν επέλεξε για τη αντιμετώπιση του μεγάλου αυτού προβλήματος το ευρωπαϊκό ερευνητικό έργο PICASSO (Photonic Integrated Components Applied to Secure chaos encoded Optical communications systems), στο οποίο συμμετείχαν ερευνητές και επιχειρήσεις από επτά χώρες, με συντονιστή το Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών του Πανεπιστημίου Αθηνών, με επικεφαλής της ελληνικής ομάδας τον καθηγητή Δημήτρη Συβρίδη. Η λειτουργία της είναι η ακόλουθη. Κρύβουμε την πληροφοριά μέσα σε χαοτική ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Αυτό καθιστά εξαιρετικά δύσκολο να βρεθεί το μήνυμα αν πέσει σε λάθος χέρια καθώς ο υποκλοπέας πρέπει να ξεχωρίσει μεσα στο χάος την πληροφορία το οποίο είναι σχεδόν αδύνατο αν ο δέκτης του δεν έχει ακριβώς τα ίδια χαρακτηριστικά με τον πομπό. Και το να έχει μια πανομοιότυπη συσκευή είναι επίσης σχεδόν αδύνατο. Ως πομποί χρησιμοποιούνται λέιζερ τα οποία είναι αρμονικοί ταλαντωτές. Στην κλασική μορφή κρυπτογραφίες παράγουν ένα μονοχρωματικό ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Κάτω από κατάλληλες ειδικές συνθήκες, το λέιζερ μπορεί να γίνει ασταθές και να μετατραπεί σε χαοτικό ταλαντωτή, ο οποίος παράγει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία μεγάλου φασματικού εύρους. Ο δέκτης ο οποίος είναι μια πανομοιότυπη συσκευή λέιζερ αντιστρέφει την διαδικασία ώστε να αφαιρεθεί το χάος και να παραλάβει “καθαρή” την πληροφορία.

Η ιδέα υπήρχε από τους Kevin Cuomo και Alan Oppenheim το 1992 βασισμένοι στην ανακάλυψη των Pecora και Carroll το 1990 ότι δύο χαοτικά συστήματα είναι δυνατόν να συγχρονιστούν. Κατασκεύασαν μια συσκευή, ένα ταλαντωτή, με βάση της εξισώσεις του Lorenz ώστε να κρύβουν μέσα στο χάος των εξισώσεων το μήνυμα (Εικόνα 8.1) . Το κύκλωμα βγάζει 3 τάσεις u, v, w από τρία διαφορετικά σημεία. Το κύκλωμα ουσιαστικά λειτουργεί σαν ένας αναλογικός υπολογιστής για τις εξισώσεις του Lorenz.

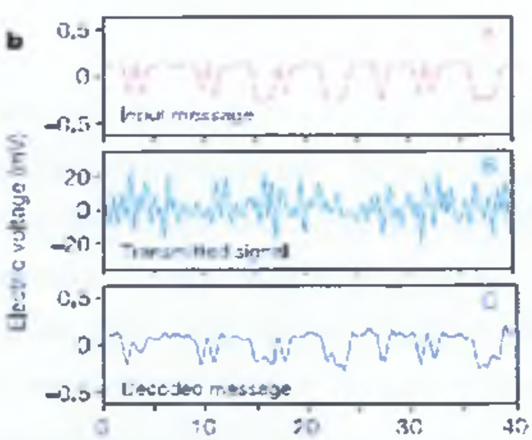


Εικόνα 8.1: Ηλεκτρονικό κύκλωμα υλοποίησης του ελκυστή Lorenz από τους Kevin Cuomo και Alan Oppenheim το 1992

Τα αποτελέσματα των ερευνών είναι απολύτως ικανοποιητικά. Το σύστημα αυτό κρυπτογράφησης λειτούργησε υπό πραγματικές συνθήκες στην χώρα μας. Το μήνυμα στάλθηκε από το μητροπολιτικό δίκτυο οπτικών ινών των «Αττικών Επικοινωνιών» στην Πανεπιστημιούπολη του Ζωγράφου, όπου παραλήφθηκε ακέραια η πληροφορία, επιβεβαιώνοντας πως είναι δυνατή η εφαρμογή της σε εμπορικά δίκτυα οπτικών ινών. Η έρευνα περιγράφεται στο έγκριτο περιοδικό “Nature” στο ακόλουθο σχέδιο (*Εικόνα 8.2, a*) βλέπουμε την διαδρομή που ακολούθησε το μήνυμα καθώς και το ίδιο το μήνυμα. Στο πρώτο διάγραμμα το αρχικό μήνυμα, στο δεύτερο το κρυμμένο μήνυμα και στο τρίτο το αποκωδικοποιημένο. (Εικόνα 8.2.b)



Εικόνα 8.2.a: Η διαδρομή της πληροφορίας από το μητροπολιτικό δίκτυο οπτικών ινών των «Αττικών Επικοινωνιών» στην Πανεπιστημιούπολη του Ζωγράφου.



Εικόνα 8.2.b: Αρχικό μήνυμα, B κρυπτογραφημένο μήνυμα, C αποκωδικοποιημένο μήνυμα

Η έρευνα έγινε επίσης εξώφυλλο στο περιοδικό "New Scientist" στο τεύχος που κυκλοφόρησε στις 19 Νοεμβρίου του 2005 (Εικόνα 8.3). Το οποίο περιείχε άρθρο με τίτλο "Let chaos keep your secrets safe" που αναφερόταν στην έρευνα.

Εικόνα 8.3. Εξώφυλλο του περιοδικού New Scientist

Το επόμενο βήμα του ερευνητικού έργου είναι να ενσωματώσουν την τεχνολογία στις συσκευές της βασικής υποδομής του Διαδικτύου. Στο οποίο βρίσκονται πολύ κοντά και η επίδειξη αναμένεται να γίνει και πάλι στην χώρα μας στο μητροπολιτικό δίκτυο οπτικών ινών των «Αττικών Επικοινωνιών».

Βέβαια με την μέθοδο αυτή λύνεται μόνο ένα μέρος του προβλήματος προς το παρόν, της ενσύρματης επικοινωνίας. Όμως έχουν ήδη ξεκινήσει προσπάθειες για την χρήση παρόμοιας φιλοσοφίας και στις επικοινωνίες των κινητών τηλεφώνων.

Η κρυπτογραφία είναι πάρα πολύ συμαντική όσο αφορά την μεταφορά πληροφοριών του στρατού. Καθώς όπως προείπαμε η κρυπτογράφια εξελίσσεται συνεχώς διάφορες ιδέες έρχονται στο προσκήνιο μία απο αυτές που έρχεται απο τον χώρο του ελληνικού στρατού. Αφορά την κρυπτασφάλιση δεδομένων υπολογιστή μέσω φράκταλ εικόνων. Η κρυπτασφάλιση γίνεται είτε μέσα στον υπολογιστή ώστε να μην αποθηκεύεται η πληροφορία "καθαρή" στον υπολογιστή είτε κατα την μεταφορά των αρχείων με την εφαρμογή της πύλης XOR. Το βασικό πλεονέκτημα της πύλης XOR είναι πως παράγεται με χαοτικές μεθόδους. Αρχικά δημιουργείται μια εικόνα fractal άπειρης πολυπλοκότητας με αυτοομοιότητα σε διαφορετικές κλίμακες και χαοτική μορφή. Η εικόνα παράγεται από την εφαρμογή της σύγκλισης κατά Newton με τον αναδρομικό τύπο $z_i = z - \frac{F(z)}{F'(z)}$ σε μια μιγαδική συνάρτηση 3ου βαθμού $F(z)=(z-k_1)*(z-k_2)*(z-k_3)$ όπου τα $k_1\, k_2\, k_3$ οι ρίζες της μιγαδικής συνάρτησης. Το απεικονιζόμενο χρώμα κάθε σημείου, προκύπτει από τον αριθμό των επαναλήψεων που θα εφαρμοστούν στον αναδρομικό τύπο σύγκλισης όταν σαν πρώτη εκτίμηση ρίζας ληφθεί ο μιγαδικός που αντιπροσωπεύει το συγκεκριμένο σημείο. Η συγκεκριμένη εικόνα εξαρτάται από τις εξής εννέα παραμέτρους που τελικά συνιστούν και την κρυπτομεταβλητή:

(1) Τα $k_1\, k_2\, k_3$ (συνολικά 6 δεκαδικοί αριθμοί)

(2) Την μιγαδική συντεταγμένη (X_i, Y_i) του κέντρου της οθόνης (2 δεκαδικοί αριθμοί).

(3) Τον συντελεστή μεγέθυνσης (:f), δηλαδή πόσα σημεία εικόνας (pixels) αντιστοιχούν σε μια μιγαδική μονάδα επί της οθόνης (1 δεκαδικός αριθμός).

- Η εικόνα αυτή αποθηκεύεται σε συμπιεσμένη μορφή :

(αριθμός χρώματος και πολλαπλότητα του ιδίου χρώματος)

- Από κάθε στοιχείο του συμπιεσμένου αρχείου, παράγεται με επαναλήψεις της χαοτικής επαναληπτικής συνάρτησης (λογιστικής απεικόνισης) $x:=4*x*(1-x)$ ένας κωδικός ASCII .Η αλληλουχία των κωδικών αυτών αποτελεί το κλειδί.
- Κάθε κωδικός του κλειδιού εφαρμόζεται με XOR σε κάθε χαρακτήρα και παράγει το κρυπτασφαλισμένο αρχείο.
- Ο ανταποκριτής έχοντας την γνώση των εννέα παραμέτρων της κατατετμημένης εικόνας (FRACTAL IMAGE) που όπως προαναφέρθηκε αποτελούν την κρυπτομεταβλητή, αναπλάθει το κλειδί και εφαρμόζοντας πάλι XOR σε κάθε στοιχείο του κρυφού με το κλειδί ανακτά το καθαρό αρχείο.

Όσο αφορά την αποτελεσματικότητα της κρυπτασφάλησης αρχικά είναι πολύ δύσκολη η μαθηματική διερεύνηση και απαιτείται ακριβώς ίδιο επεξεργαστής για να παραχθεί η ίδια μορφοκλασματική απεικόνιση. Επίσης η χαοτική συμπεριφορά παρέχει πολύπλοκη κρυπτανάλυση και και παράγει κλειδί πολύ μεγάλου μήκους. Τέλος η εφαρμογή της μεθόδου Newton αποτελεί ισχυρότατο εργαλείο μιας και το παραμικρό λάθος στις αρχικές συνθήκες προσέγγισης οδηγεί σε τετράγωνο σφάλματος για κάθε επανάληψη της διαδικασίας.

3.2 Αστρονομία

Στο χώρο της αστρονομίας υπήρχαν δύο φαινόμενα τα οποία δεν ήταν δυνατό να εξηγηθούν πριν την ανακάλυψη της θεωρίας του χάους. Το πρώτο αφορά της τροχιές του Κρόνου, του Δία και του Ουρανού οι οποίες είναι πιο ελλειπτικές από όσο προβλεπόταν. Το Δεύτερο αφορά μια καταιγίδα μετεωριτών και αστεροειδών η οποία μετά από ραδιοχρονολόγηση στα πετρώματα της σελήνης ανακαλύφθηκε πως συνέβη περίπου 800 εκατομμύρια χρόνια μετά την δημιουργία του ηλιακού μας συστήματος. Οι αστρονόμοι θεωρούν πως την περίοδο αυτή μια καταιγίδα μετεωριτών και αστεροειδών έπεσε στη γη, την σελήνη, την Αφροδίτη και τον Ερμή. Το φαινόμενο αυτό ονομάστηκε όψιμος κατακλυσμιαίος βομβαρδισμός. Οι απαντήσεις δόθηκαν από το “μοντέλο της Νίκαιας” το οποίο πήρε το όνομα του από το πανεπιστήμιο της Νίκαιας.

Το μοντέλο αυτό είναι μια προσομοίωση του ηλιακού μας συστήματος τα πρώιμα χρόνια δημιουργίας του. Οι τροχιές των σωμάτων γύρω από τον ήλιο ήταν αρχικά κυκλικές και μικρότερες από ότι σήμερα. Η τροχιά του Ποσειδώνα ήταν πιο κοντά στον ήλιο από ότι η τροχιά του Ουρανού. Έξω από την τροχιά του ουρανού υπήρχαν πλανητοειδή τα οποία δεν είχαν συγκροτήσει κάποιο πλανήτη. Κάποια από αυτά είχαν ασθενή αλληλεπίδραση. Οι αλληλεπιδράσεις αυτές έκαναν την τροχιά των πλανητών να μεγαλώσει (μετανάστευση πλανητών). Κατά συνέπεια διαφοροποιήθηκε και η περίοδος περιστροφής των πλανητών δημιουργώντας συντονισμό. Όταν δύο περιστροφές του Δία ισοδυναμούσε με μία περιστροφή του Κρόνου γύρω από τον ήλιο. Ο λεγόμενος συντονισμός 2 προς 1. Οι τροχιές αποσταθεροποιήθηκαν. Η τροχιά του Ποσειδώνα βγήκε εκτός της τροχιάς του Ουρανού. Καθώς αποσταθεροποιήθηκαν οι τροχιές όλων τον πλανητών δημιουργήθηκε χάος στο ηλιακό σύστημα και στις τροχιές των πλανητιδίων. Τα οποία σάρωσαν το ηλιακό σύστημα προκαλώντας τον όψιμο κατακλυσμιαίο βομβαρδισμό.

Ας πάμε σε κάτι ακόμη μεγαλύτερο, τους γαλαξίες. Οι γαλαξίες χωρίζονται σε ελλειπτικούς, σπειροειδείς και ανώμαλους. Ανώμαλοι ονομάζονται όσοι δεν μπορούν να καταταχθούν στους ελλειπτικούς ή στους σπειροειδής.

Όσον αφορά στους ελλειπτικούς γαλαξίες αρχικά είχε θεωρηθεί πως σε αυτό το είδος απουσιάζει το χάος ή υπάρχει σε πολύ μικρο ποσοστό. Μετά από παρατηρήσεις όμως ανακαλύφθηκε πως υπάρχουν τρία βασικά είδη τροχιάς των σωμάτων. Η τροχιά του κουτιού, η τροχιά του σωλήνα καθώς και οι χαοτικές τροχιές όπου αντιστοιχούν στο 40 με 50 τοις εκατό.

Ας υποθέσουμε ότι έχει δημιουργηθεί μία μελανή οπή (μαύρη τρύπα) στο κέντρο ενός γαλαξία. Αν περάσει μια τροχιά κοντά στην μελανή οπή αυτή η τροχιά γίνεται χαοτική. Καθώς η τροχιά αλλάζει, αποσταθεροποιείται η τροχιά όλου του γαλαξία. Δημιουργώντας χάος που φτάνει σε ποσοστό 80 μέχρι 85 τοις εκατό. Σταδιακά γίνεται μεταμόρφωση του συστήματος. Το σύστημα παίρνει πιο σφαιρικό σχήμα. Αυξάνοντας την συμμετρία του περιορίζεται το χάος σε μικρότερα ποσοστά περίπου στο 10 με 20 τις εκατό.

Οι σπειροειδείς είναι λιγότερο συμμετρικοί από τους ελλειπτικούς. Γύρω από το κέντρο του γαλαξία περιστρέφονται σπείρες σωμάτων χαρακτηριστική, είναι η πολύ μεγάλη ταχύτητα περιστροφής των σπειρών. Χωρίζονται στους ραβδωτούς και τους κανονικούς. Για τους Ραβδωτούς υπάρχουν δύο θεωρίες. Η πρώτη είναι η οργανωμένη όπου βασίζεται στην θεωρία μεταποιούσων εκλείψεων. Όπου αλλάζοντας η μορφολογία των τροχών μπορεί να σχηματιστεί σπειροειδής σχηματισμός. Και η χαοτική ξεκινώντας από ένα ασταθές σημείο το σύστημα αποκτά μεγάλο ποσοστό χάους και καταλήγει σε σπειροειδή σχηματισμό.

3.3 Λογοτεχνία

Εκτός από άλλες μορφές τέχνης η θεωρία του χάους έχει επηρεάσει και την λογοτεχνία. Ενδεικτικό παράδειγμα είναι το Μυθιστόρημα του Παυλιώτη Αργύρη με τίτλο " παράξενοι ελκυστές". Κάποιος αναγνώστης σχολιάζει για το βιβλίο."κάθε πρόσωπο στην ιστορία που περιγράφει ο Αργύρης Παυλιώτης περνάει από τη (φαινομενική) τάξη της ζωής του, στο χάος της ψυχής του και στον ελκυστή που κουβαλά μέσα του. Εκείνον τον παράξενο ελκυστή που δημιούργησαν γεγονότα κι άνθρωποι προκαλώντας τα καθοριστικά και κακοφορμισμένα τραύματα της παιδικής ηλικίας."

3.4 Ιατρικές εφαρμογές

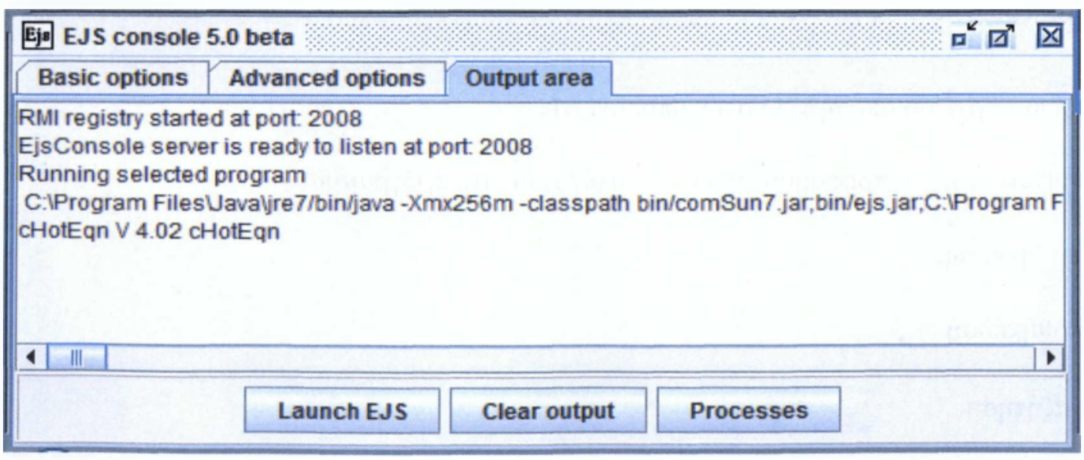
Πέραν της κρυπτογραφία το χάος έχει εφαρμογές και σε άλλους τομείς όπως η ιατρική στο κομμάτι των fractals αναφέραμε την μελέτη κάποιων οργάνων (καρδιά, πνεύμονες,νεφρά). Όμως τα περασμένα έτη (1987 1988) έγιναν κάποιες μελέτες για την ανάλυση του ηλεκτροκαρδιογραφήματος με της μεθόδους ανάλυσης χαοτικών χρονοσειρών από διάφορους ερευνητές όπως ο Coldberger και Babloyantz. Με τον όρο χρονοσειρά ορίζουμε μια συλλογή από παρατηρήσεις που λαμβάνουν χώρα διαδοχικά στο χρόνο. Μια χρονοσειρά συμβολίζεται συνήθως με την μεταβλητή $x(t)$, όπου ο δείκτης t δηλώνει χρόνο. Οι χρονοσειρές που αναλύονται ευκολότερα είναι αυτές που αποτελούνται από παρατηρήσεις που λαμβάνονται σε ίσα χρονικά διαστήματα. Η ανάλυση της μεταβλητότητας της καρδιακής συχνότητας αποτέλεσε ένα ισχυρό εργαλείο στην κατανόηση και μελέτη της καρδιακής λειτουργίας, καθώς επίσης και στον καθορισμό του κατά πόσο αυτή η λειτουργία είναι υγιής. Για κάποιους ερευνητές οι μέθοδοι ανάλυσης χαοτικών χρονοσειρών σε ό,τι αφορά την εφαρμογή τους σε καρδιογραφήματα, υπό κάποιες συνθήκες θα μπορούσαν να έχουν κλινική εφαρμογή. Υπάρχουν όμως και ερευνητές που βλέπουν την εφαρμογή των μεθόδων αυτών με κριτικό μάτι θεωρώντας τις τρωτές κι ευαίσθητες αμφισβητώντας έτσι την ικανότητα αξιοποίησης τους στην κλινική πράξη.

Μια άλλη εφαρμογή στον τομέα της ιατρικής είναι η χρήση ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος και η εύρεση των εκθετών Lyapunov για την πρόβλεψη της επιληπτικής κρίσης. Μετά από πειράματα βρέθηκε πώς οι εγκεφαλικές διαδικασίες που τελούνται λίγο πριν την κρίση, αλλά και κατά τη διάρκειά της σχετίζονται με χαμηλότερο βαθμό πολυπλοκότητας σε σχέση με τη φυσιολογική κατάσταση. Επίσης, υπολογίστηκε θετική η τιμή του μεγαλύτερου εκθέτη Lyapunov, λ_{max} , γεγονός που οδήγησε στο συμπέρασμα πως το υπό εξέταση σήμα είναι χαοτικό. Έχει παρατηρηθεί επίσης ότι λίγο πριν την κρίση η τιμή του λ_{max} μειώνονταν στα ηλεκτρόδια κοντά στην επιληπτική εστία όταν ξεκινά μια επιληπτική κρίση.

4 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΤΗΣ EASY JAVA SIMULATION

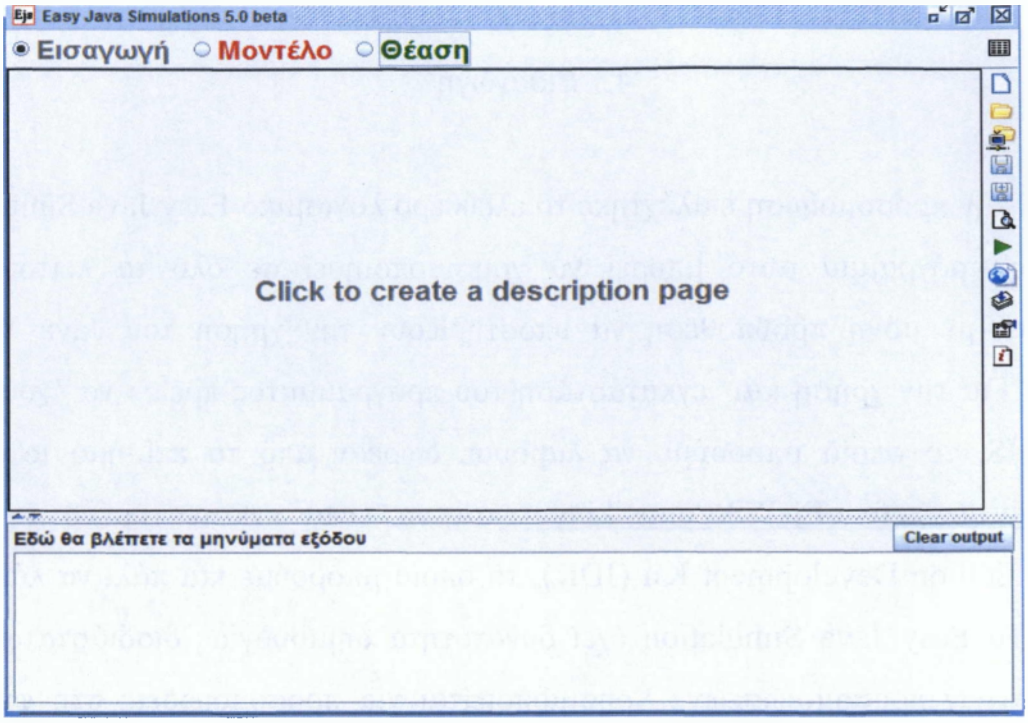
4.1 Εισαγωγή

Για την προσομοίωση επιλέχτηκε το ελεύθερο λογισμικό Easy Java Simulation (EJS). Το πρόγραμμα αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε όλο τα λειτουργικά συστήματα με μόνη προϋπόθεση να υποστηρίζουν την χρήση του Java Virtual Machine. Για την χρήση και εγκατάσταση του προγράμματος πρέπει να έχουμε το αρχείο EJS, το οποίο μπορούμε να λάβουμε δωρεάν από το επίσημο ιστότοπο http://www.um.es/fem/EjsWiki/pmwiki.php και να είναι εγκατεστημένο το Java Standard Edition Development Kit (JDK), το οποίο μπορούμε και πάλι να λάβουμε δωρεάν. Το Easy Java Simulation έχει δυνατότητα δημιουργίας δισδιάστατων και τρισδιάστατων προσομοιώσεων. Χρησιμοποιείται για προσομοιώσεις στη φυσική, βιολογία χημεία και τα μαθηματικά. Για να ανοίξουμε το πρόγραμμα ανοίγουμε το αρχείο EjsConsole από τον φάκελο του EJS. Αν λειτουργεί σωστά θα εμφανιστεί το ακόλουθο παράθυρο (Εικόνα 9.1)



Εικόνα 9.1

και εμφανίζεται η αρχική οθόνη (Εικόνα 9.2)



Εικόνα 9.2: Αρχική οθόνη του Easy java simulation, πεδίο εισαγωγή

Στη εισαγωγή μπορούμε να γράψουμε κάποια στοιχεία για την προσομοίωση. Δεξιά βλέπουμε την μπάρα επιλογών με τις εξής επιλογές:

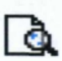
 δημιουργία νέου αρχείου,

 άνοιγμα αρχείου από αρχείο στον υπολογιστή

 άνοιγμα αρχείου προσομοιώσεων που υπάρχουν στο πρόγραμμα,

 αποθήκευση,

 αποθήκευση ως,

 αναζήτηση,

 εκτέλεση,

 επιλογές(όπως γλώσσα, εισαγωγή πληροφοριών του δημιουργού, και άλλα),

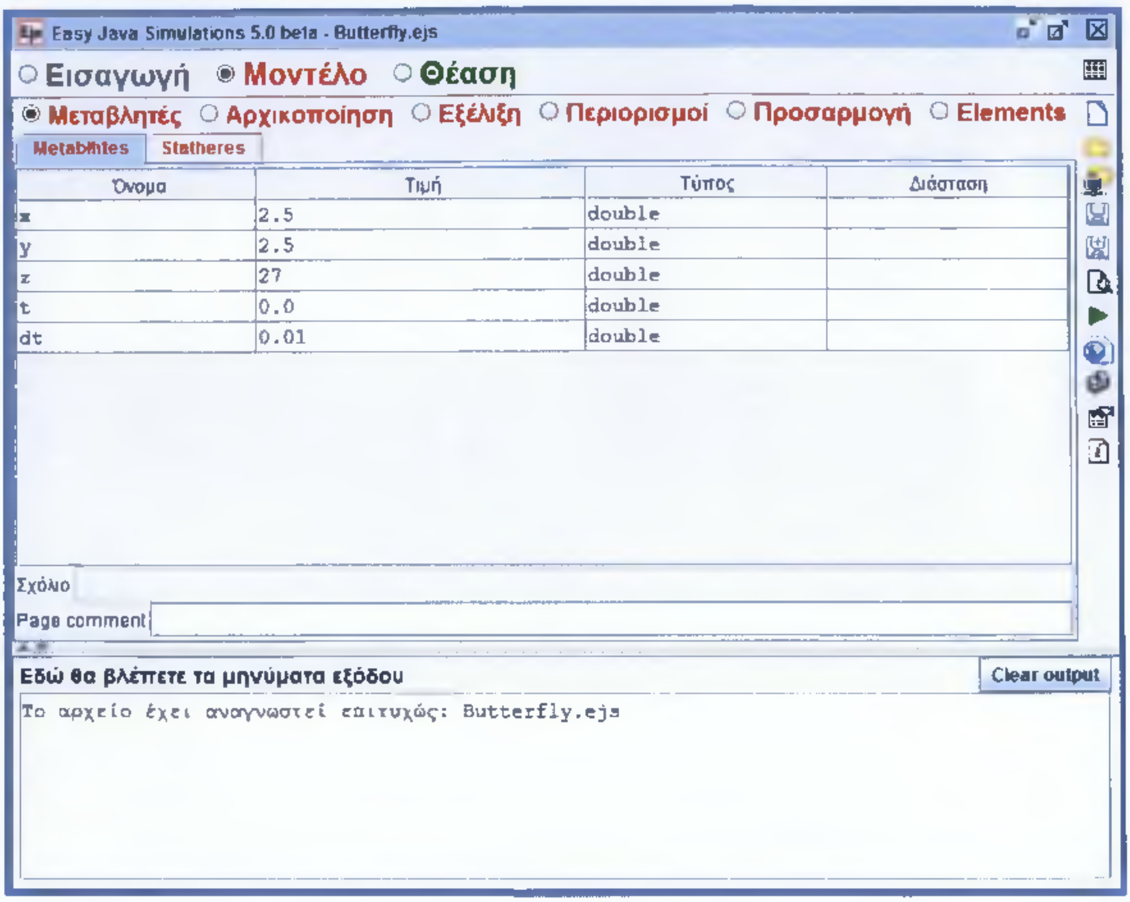
 εξαγωγή,

επιλογές και

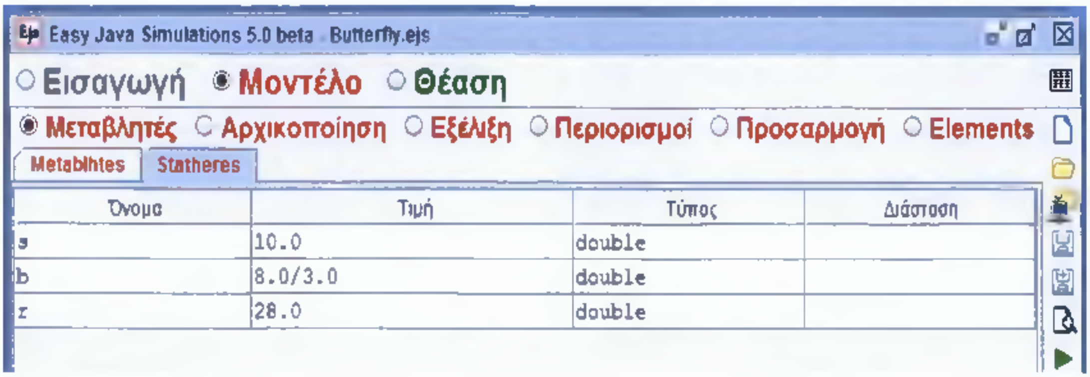
σύνδεσμό με την σελίδα EJSwiki όπου υπάρχουν πληροφορίες για το πρόγραμμα.

4.2 Μεταβλητές

Στο πεδίο μεταβλητών θέτουμε τις τιμές των μεταβλητών(Εικόνα 10.1),(Εικόνα 10.2)



Εικόνα 10.1: Πεδίο μεταβλητών έχουμε θέσει τις αρχικές τιμές των x,y,z και t καθώς και το βήμα dt. (για r=28)

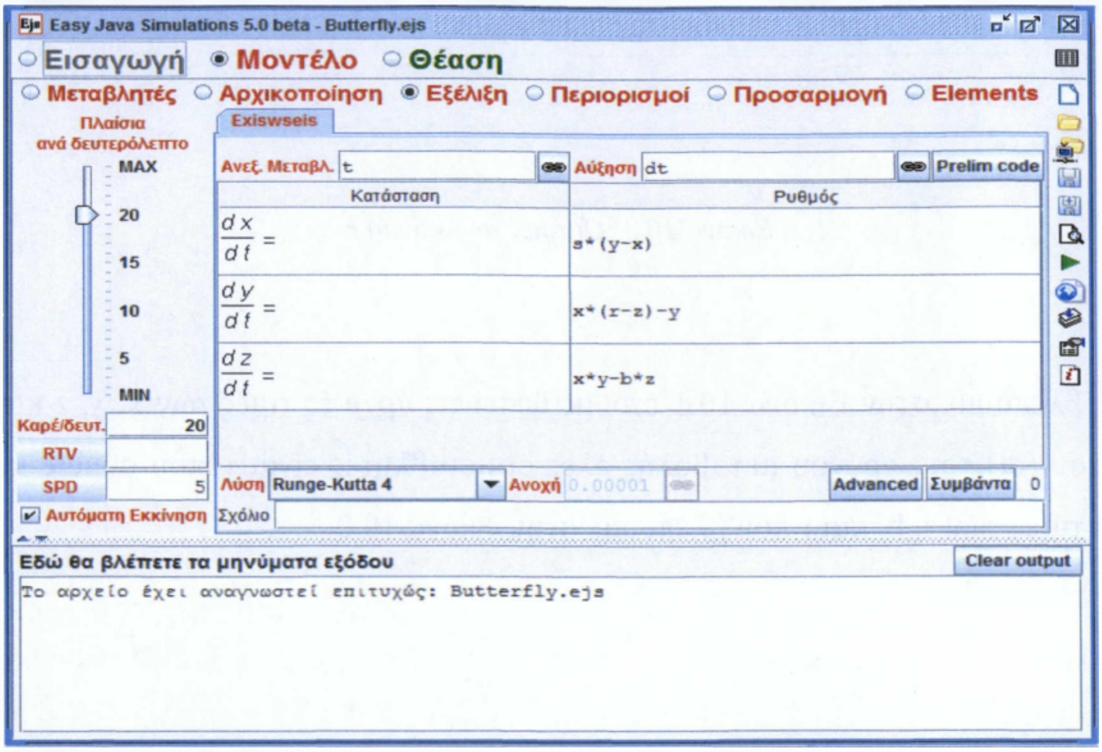


Εικόνα 10.2: Οι τιμές των s,b και r

Όπως βλέπουμε στην Εικόνα 10.1 έχουμε θέσει τις αρχικές τιμές των x, y, z και την τιμή του (dt) του χρόνου μεταβολής όλες οι μεταβλητές είναι τύπου double καθώς και οι τιμές των s, b, και r που βλέπουμε στην εικόνα 10.2.

4.3 Εξέλιξη

Στο πεδίο εξέλιξη ορίζουμε τις εξισώσεις, ή γράφουμε τον κώδικα του προγράμματος. Το Easy Java Simulation υποστηρίζει τις περισσότερες γνωστές γλώσσες προγραμματισμού.(Εικόνα 11.1)

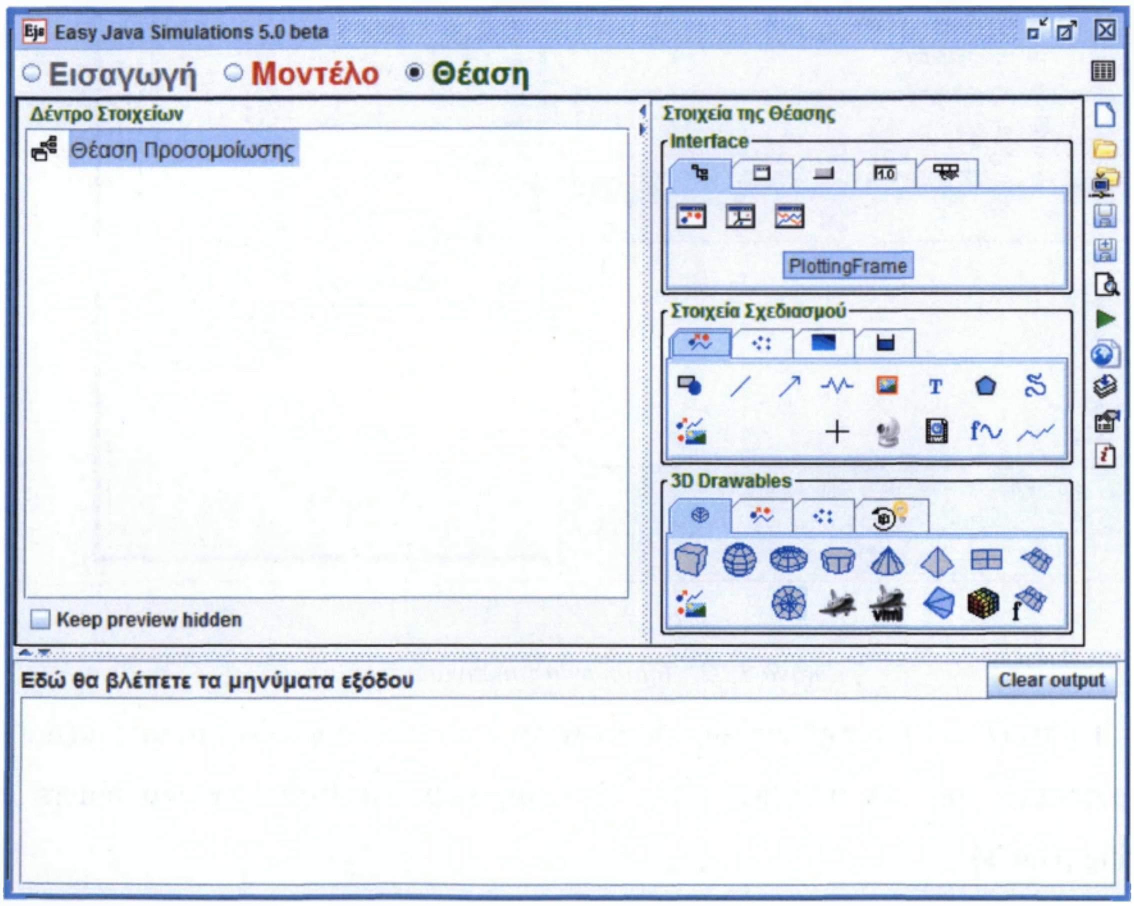


Εικόνα 11.1: Πεδίο μοντέλο του Easy Java Simulation, οι συναρτήσεις του συστήματος, μέθοδος επίλυσης και στοιχεία για την προσομοίωση.

Έχουμε θέσει το t ως ανεξάρτητη μεταβλητή και το dt ως ρυθμό αύξησης καθώς το σύστημα μας εξελίσσεται στο χρόνο. Και έχουμε επιλέξει ως μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης του συστήματος την μέθοδο Runge-Kutta τετάρτου βαθμού. Το Easy Java Simulation υποστηρίζει και άλλες μεθόδους όπως η μέθοδος Euler. Στο πεδίο καρέ/δευτερόλεπτο ορίζουμε τις απεικονίσεις που εμφανίζονται ανά δευτερόλεπτο. Και στο πεδίο SPD τον αριθμό των βημάτων που γίνονται ανά απεικόνιση.

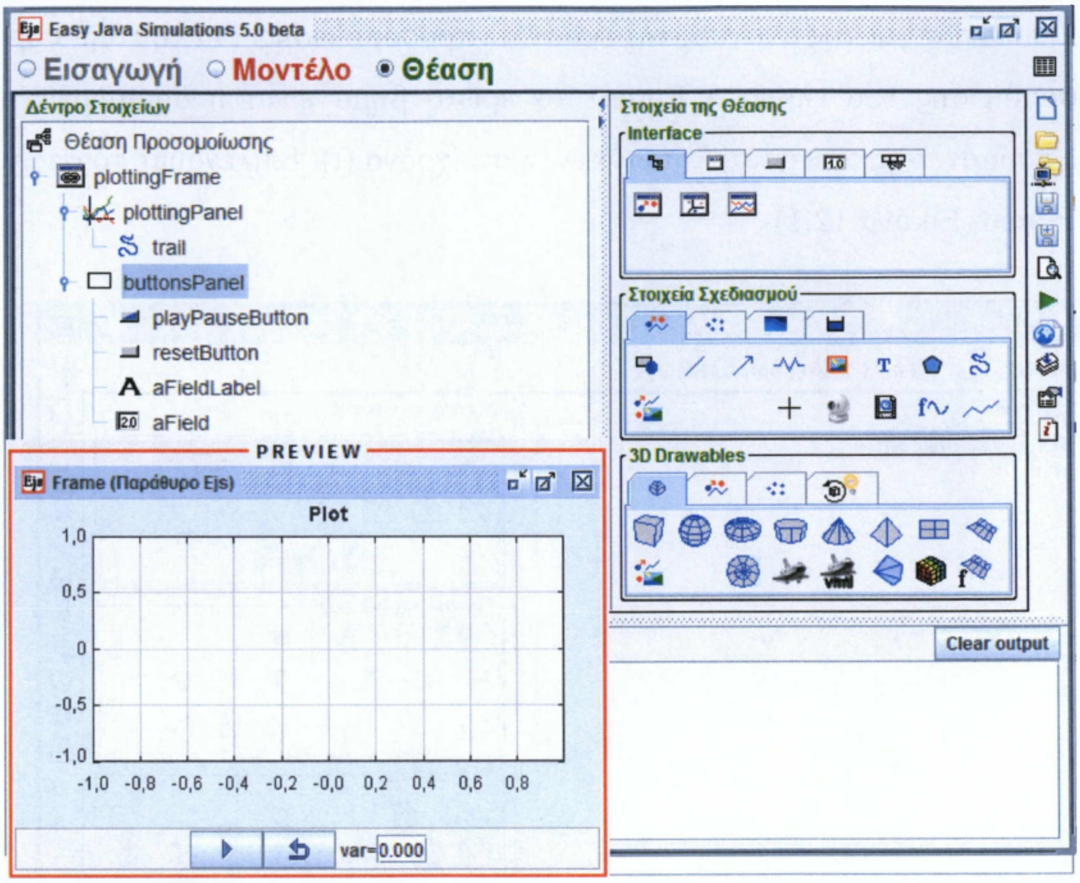
4.4 Θέαση

Εδώ διαμορφώνουμε το γραφικό περιβάλλον της προσομοίωσης. Υπάρχει πληθώρα επιλογών για της ανάγκες της εκάστοτε προσομοίωσης. Για την δημιουργία της προσομοίωσης του ελκυστή Lorenz το πρώτο βήμα είναι η δημιουργία της γραφικής παράστασης των μεταβλητών x, y, z στο χρόνο (t). Επιλέγουμε το στοιχείο Plotting Frame (Εικόνα 12.1)



Εικόνα 12.1: Πεδίο θέαση, Δημιουργία του στοιχείου plotting frame

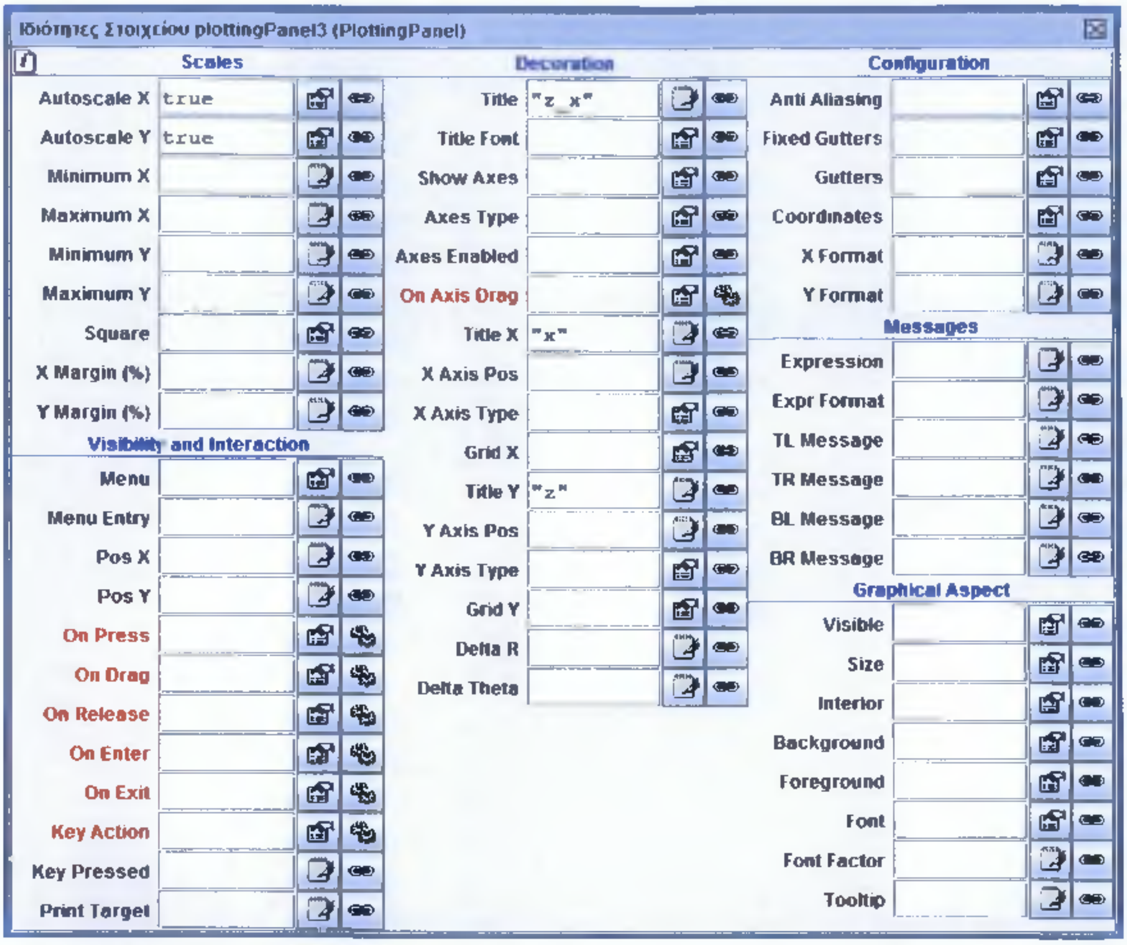
Τοποθετώντας το στο δέντρο στοιχείων εμφανίζονται ως προεπιλογή τα στοιχεία Plotting Panel και trail. Καθώς και το στοιχείο ButtonsPanel το οποίο αφορά στην δημιουργία κουμπιών και έτσι δημιουργείται το αντίστοιχο παράθυρο (plot). (Εικόνα 12.2)



Εικόνα 12.2: Δημιουργία του πίνακα frame

Το στοιχείο PlottingPanel αφορά στην δημιουργία γραφικών παραστάσεων και το βρίσκουμε από το interface στην δεύτερη καρτέλα (windows,containers and drawing panels).

Επιλέγοντας το στοιχείο PlottingPanel ανοίγει ο πίνακας ιδιοτήτων του PlottingPanel (Εικόνα 12.3).



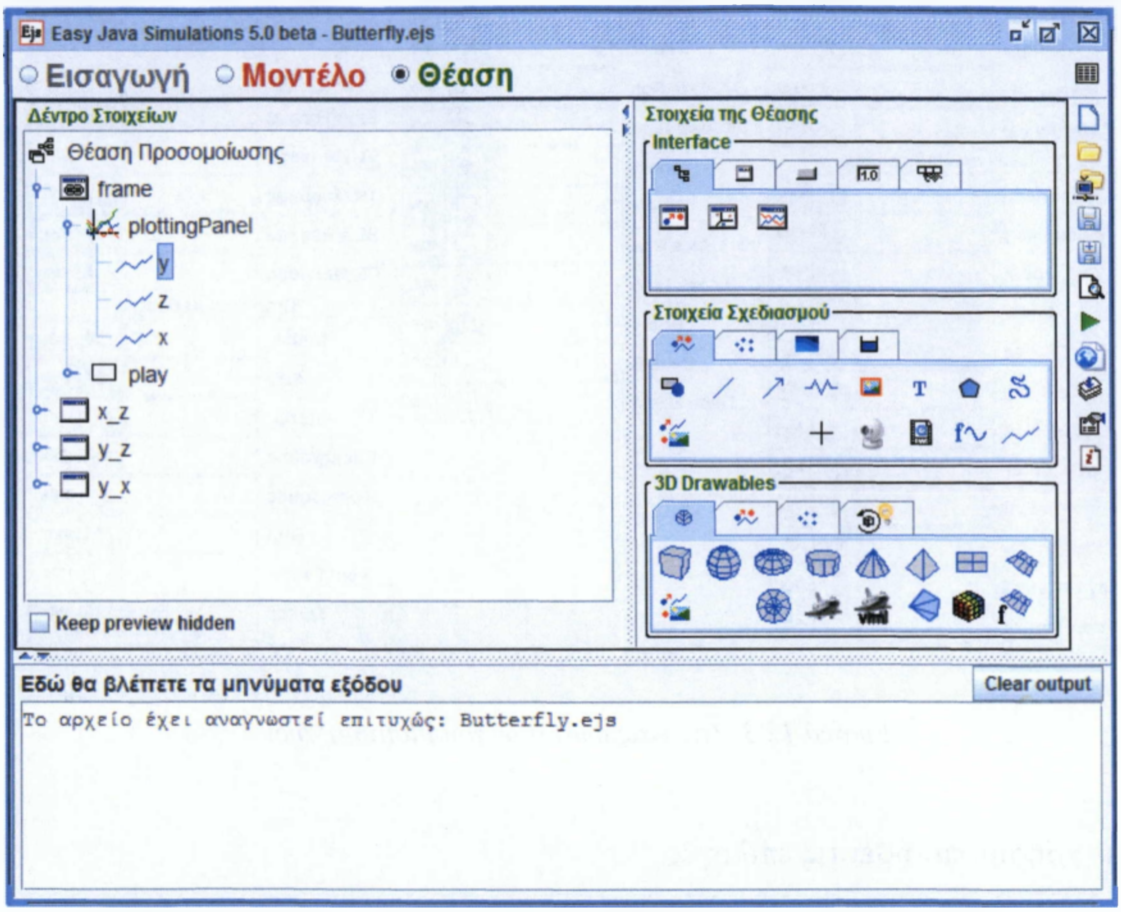
Εικόνα 12.3: Πίνακας ιδιοτήτων του PlottingPanel

Έχουμε χρησιμοποιήσει τις επιλογές:

- Autoscale x: προσαρμόζει αυτόματα τις τιμές του άξονα x ανάλογα με την τιμή που παίρνει το x.
- Autoscale y: προσαρμόζει αυτόματα τις τιμές του άξονα y ανάλογα με την τιμή που παίρνει το y.
- Title: ορίζουμε τον τίτλο του παραθύρου
- Title X: μπορούμε να γράψουμε σημείωση στο πλαίσιο του x.
- Title Y: μπορούμε να γράψουμε σημείωση στο πλαίσιο του y.

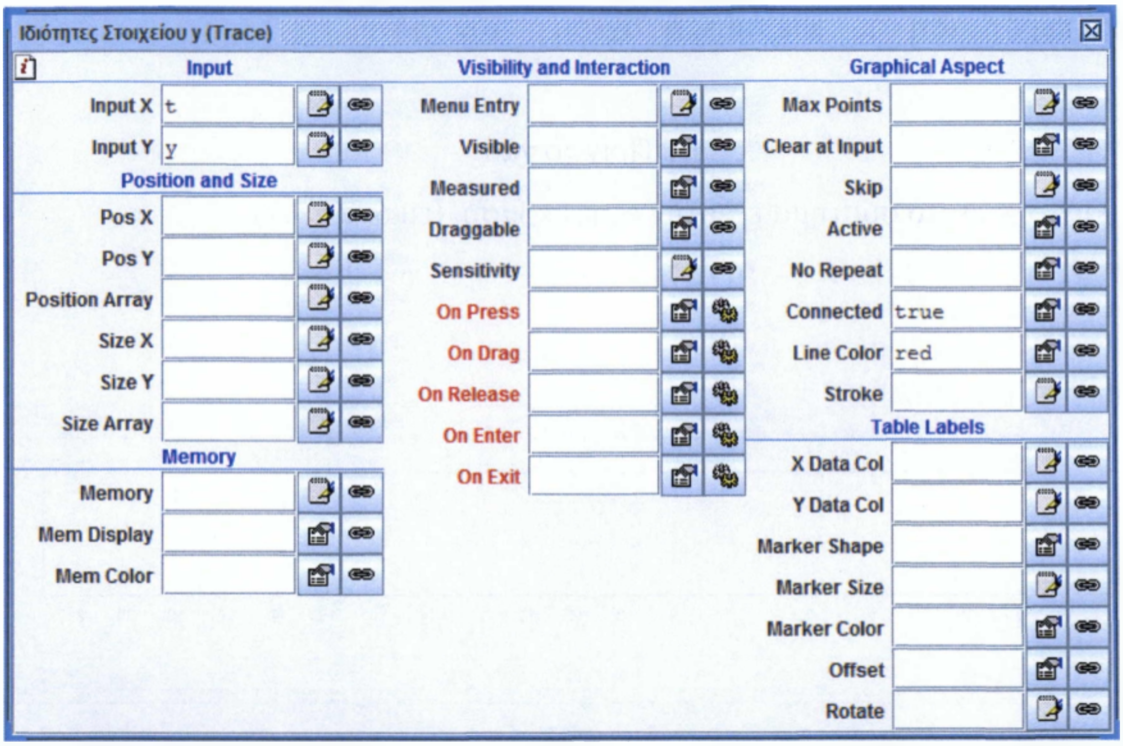
Για τις επιλογές μπορούμε να βρούμε πληροφορίες στου ιστότοπο του Easy Java Simulation http://www.um.es/fem/EjsWiki/Main/ElementsPlottingPanel .

Επιλέγουμε το στοιχείο Trace για κάθε μεταβλητή που θέλουμε να απεικονίσουμε (Εικόνα 12.4).



Εικόνα 12.4: Ο πίνακας plotting panel που εμπεριέχει τις τιμές τριών μεταβλητών

Επιλέγοντας το στοιχείο Trace ανοίγει ο πίνακας ιδιοτήτων (Εικόνα 12.5) ώστε να ορίσουμε τις συντεταγμένες.



Εικόνα 12.5

ιδιότητες του στοιχείου trace

- input X: ορίζουμε την συντεταγμένη x, δέχεται τιμές τύπου int ή double.
- input Y: ορίζουμε την συντεταγμένη y, δέχεται τιμές τύπου int ή double.

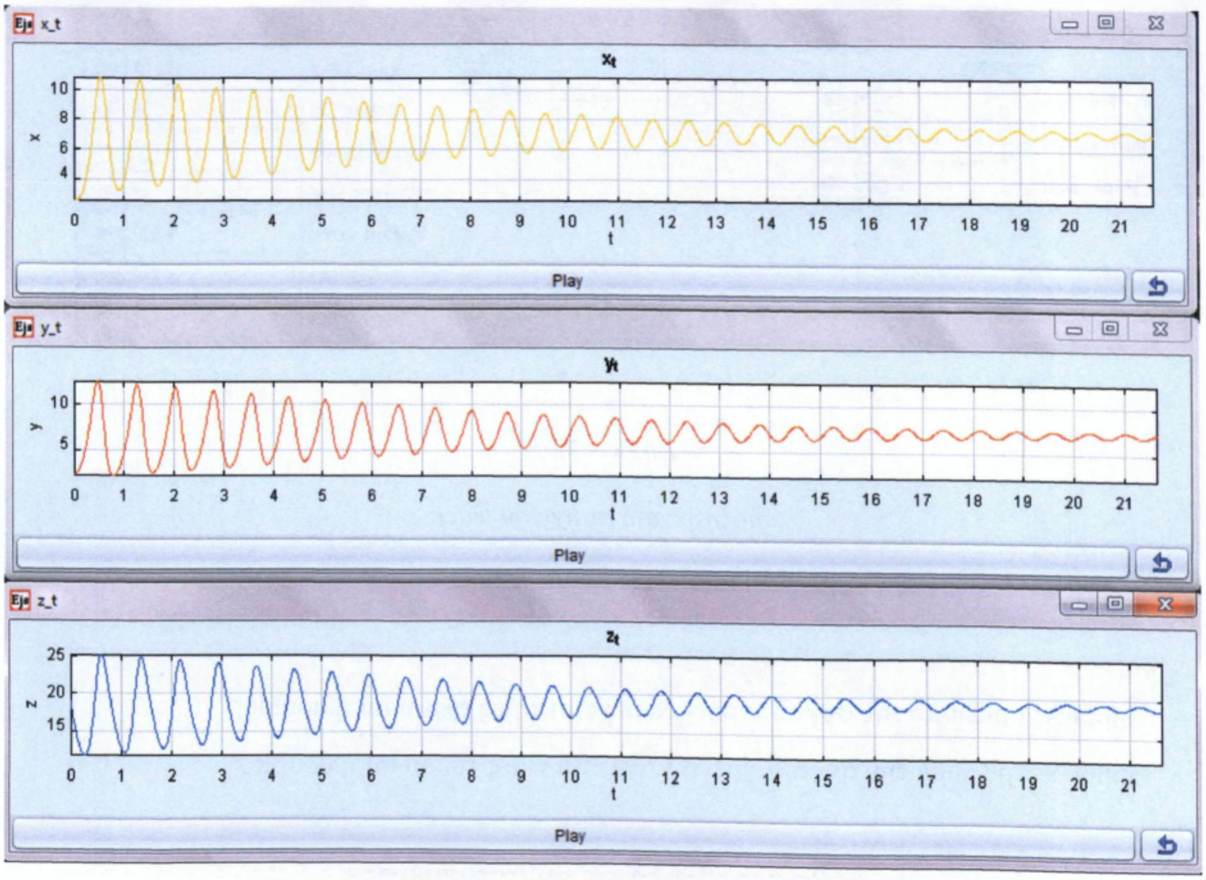
Αντίστοιχα ορίζουμε για κάθε μεταβλητή τις συντεταγμένες.

5 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΟΥ ΕΛΚΥΣΤΗ LORENZ

Στην πρώτη γραφική παράσταση (εικόνα 13.1) μπορούμε να δούμε την γραφική παράσταση της κάθε τιμής σε σχέση με τον χρόνο.

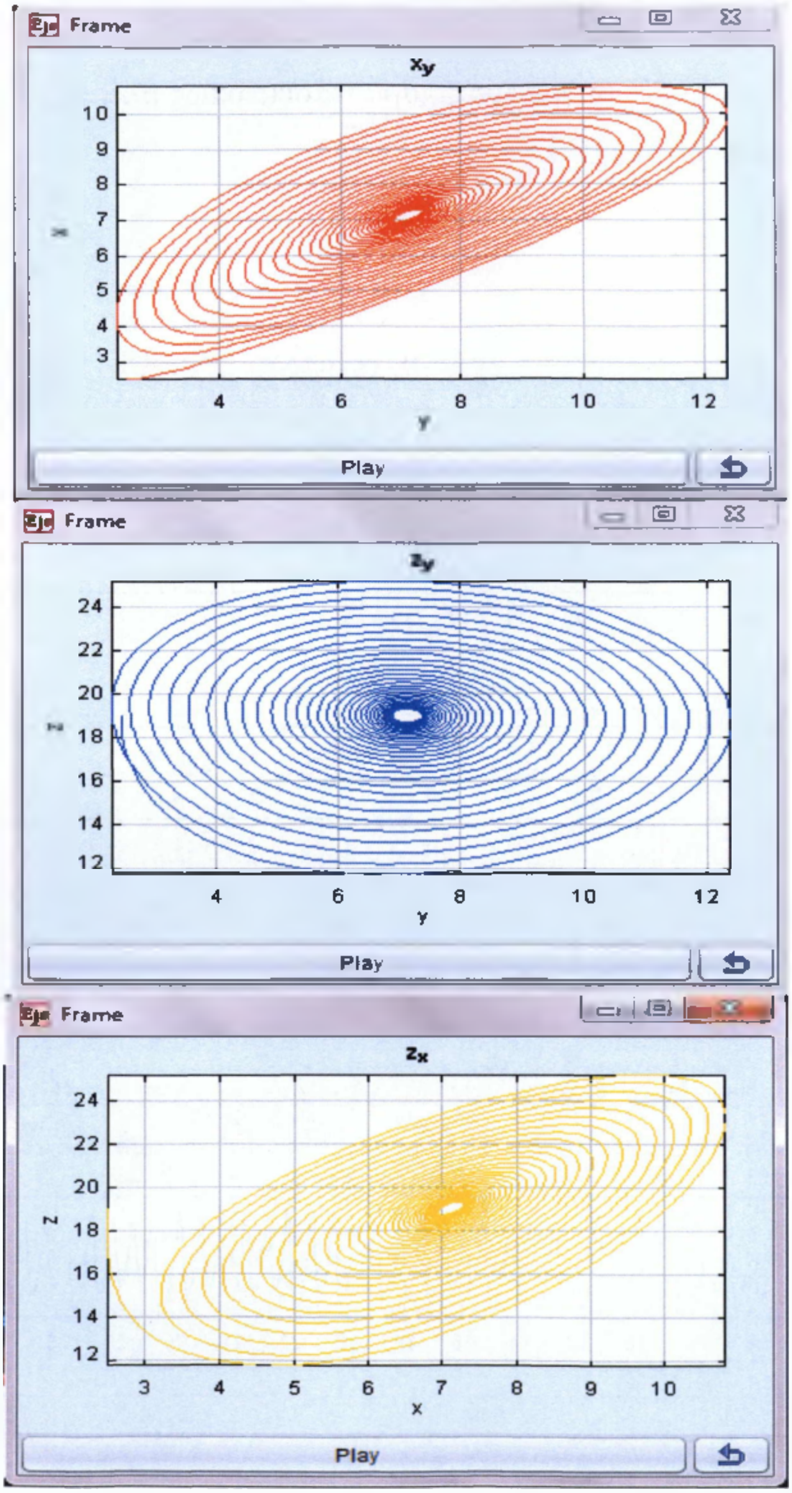
5.1 Πριν το χάος

Για $r=20$ το σύστημα έχει την εξής έκβαση. (εικόνα 13.1)



Εικόνα 13.1: Οι γραφικές παραστάσεις των x,y και z στο χρόνο για r=20

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν και οι γραφικές παραστάσεις των τιμών x,y z,x x,z

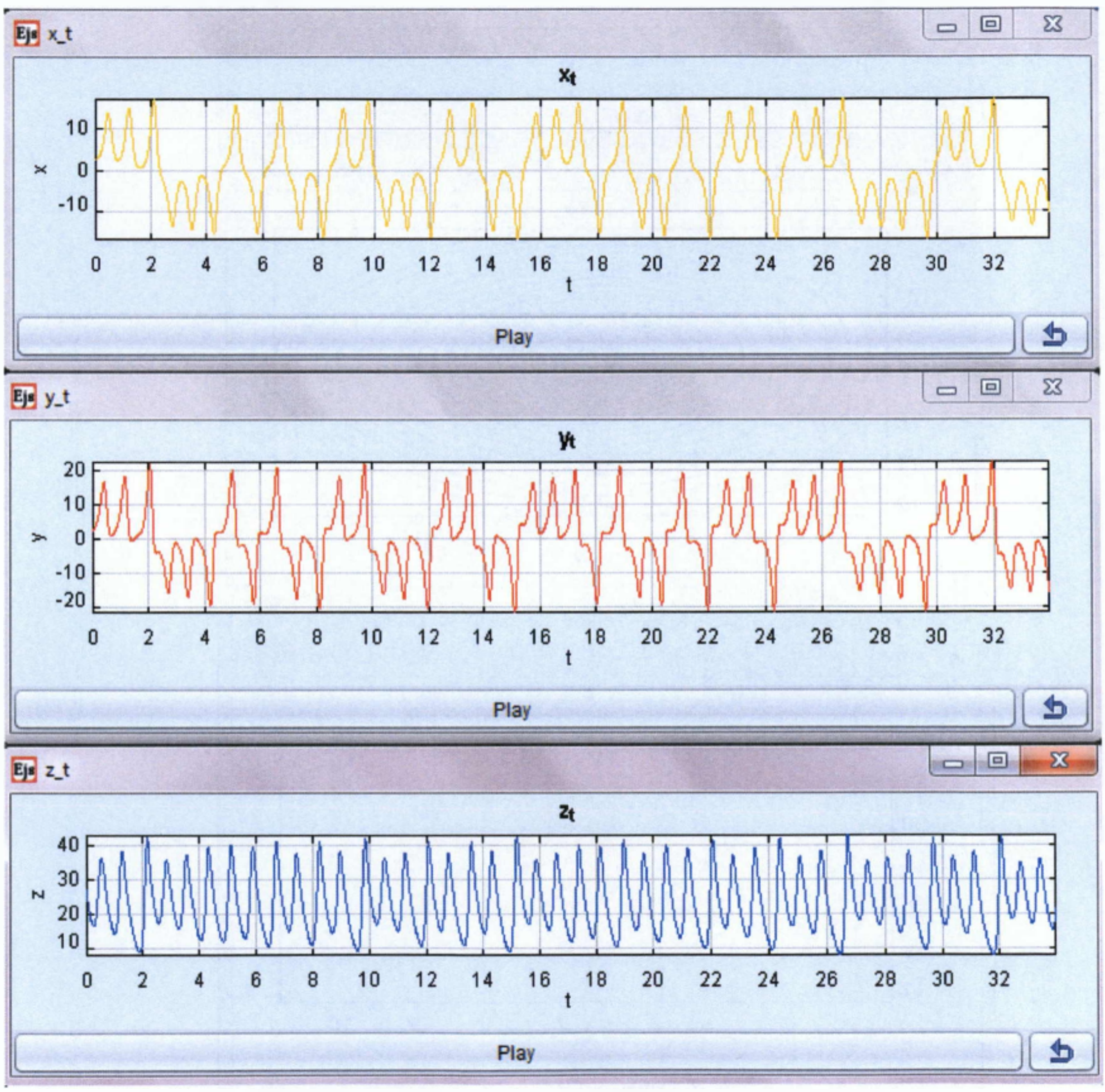


Εικόνα 13.2.Γραφικές παραστάσεις των τιμών (πάνω) x και y (κέντρο) z και y (κάτω) z και x

όπου για $r=20$ όπου έχουμε ευσταθές σημείο ισορροπίας .(Εικόνα 13.2)

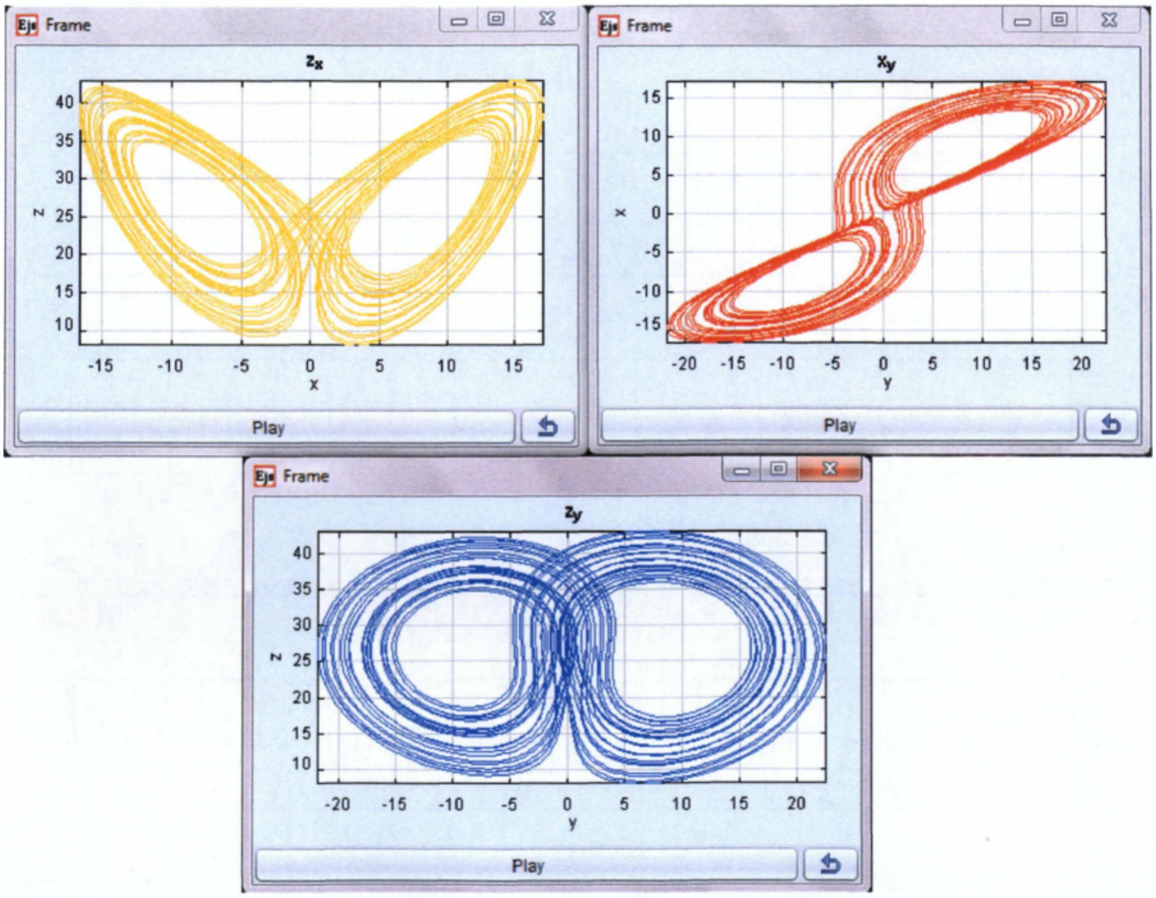
5.2 Περιοχή χαοτικής συμπεριφοράς

Αν θέσουμε το $r=28$ οι γραφικές παραστάσεις όπως βλέπουμε (εικόνα 5.3) , (εικόνα 13.4) γίνονται χαοτικές.



Εικόνα 13.3:Οι γραφικές παραστάσεις των x,y και z στο χρόνο για r=28

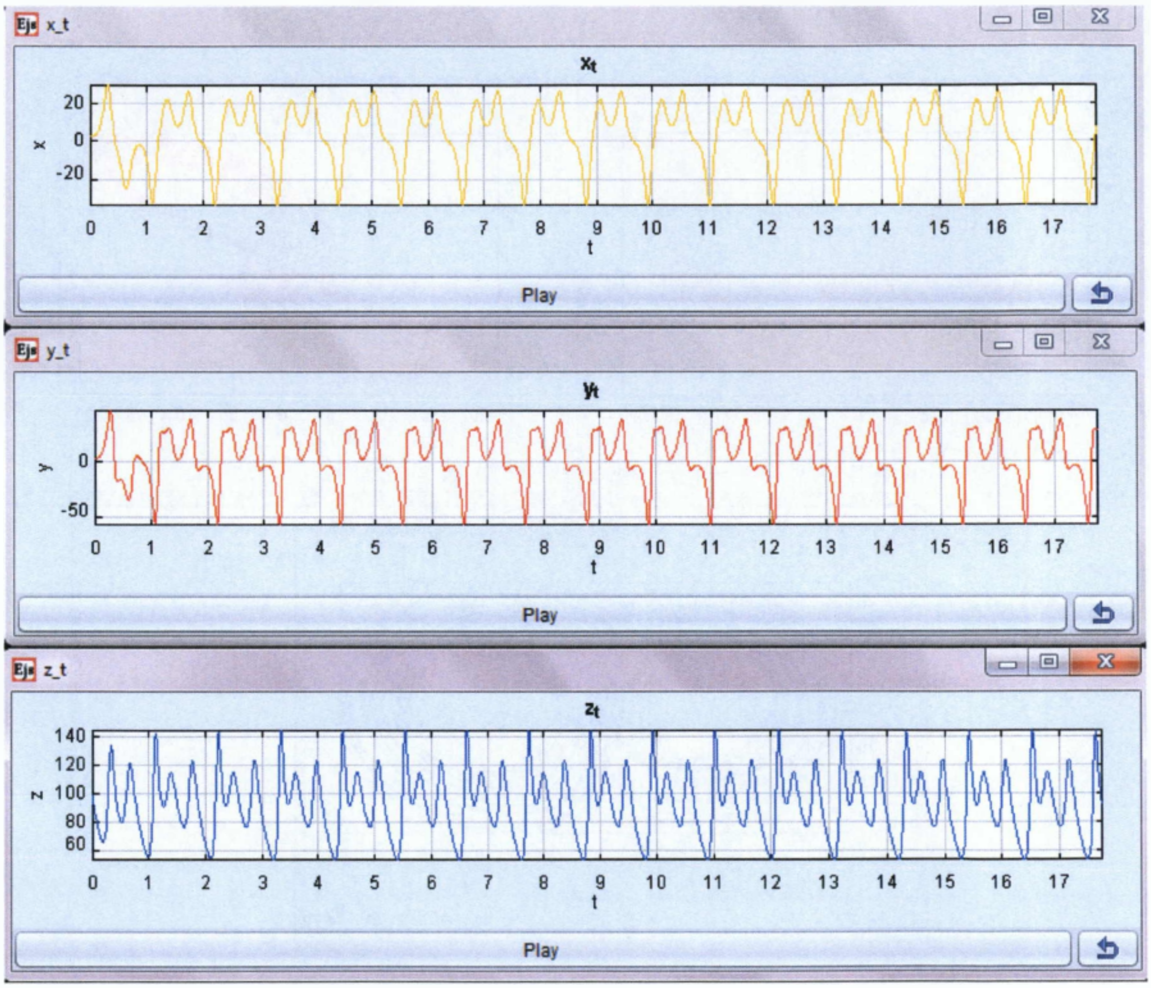
Στις γραφικές παραστάσεις των τιμών x,y z,x x,z μπορούμε να δούμε το χαρακτηριστικό σχήμα της "πεταλούδας".(εικόνα 5.4)



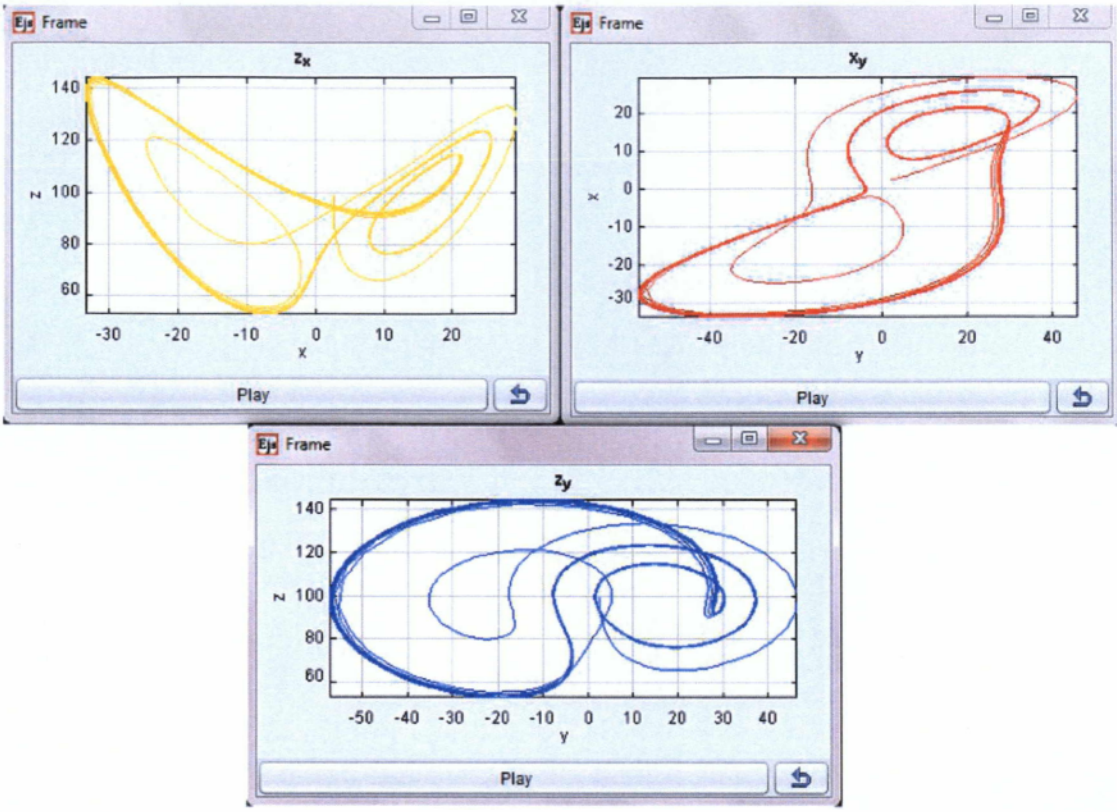
Εικόνα 13.4: Γραφικές παραστάσεις (πάνω αριστερά) z και x (πάνω δεξιά) x και y (κάτω) z και y για r=28

5.3 Περιοχή περιοδικής συμπεριφοράς

Αν θέσουμε $r=100$ τότε έχουμε και πάλι περιοδικότητα (εικόνα 13.6) , (εικόνα 13.7).



Εικόνα 13.6: Οι γραφικές παραστάσεις των x,y και z στο χρόνο για r=100



Εικόνα 13.7 Γραφικές παραστάσεις (πάνω αριστερά) z και x (πάνω δεξιά) x και y (κάτω) z και y για r=100

5.4 Συμπεράσματα

Η θεωρία του χάος είναι μια πολλά υποσχόμενη επιστήμη όπου βρίσκει εφαρμογή όλο και σε περισσότερους τομείς. Εφαρμογές του χάους συναντάμε σήμερα στην ιατρική, την οικονομία, την αστρονομία, την κρυπτογραφία και τις τέχνες. Η Επιστήμη των Δυναμικών Συστημάτων και του Χάους μελετά τη συμπεριφορά ορισμένων μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων, τα οποία κάτω από ορισμένες συνθήκες παρουσιάζουν ευαίσθητη εξάρτηση στις αρχικές συνθήκες.

Ο Edward Lorenz προσπαθώντας να προβλέψει τον καιρό ανακάλυψε το χάος, μελετώντας το εξής σύστημα τριών διαφορετικών εξισώσεων.

Στην εργασία αυτή παρατηρούμε με την βοήθεια του Easy Java Simulation ότι ανάλογα με την τιμή μιας μεταβλητής αλλάζει η κατάσταση του ελκυστή. Για μικρές τιμές το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση πριν το χάος καταλήγει σε σημείο ισορροπίας. Για ενδιάμεσες τιμές έχουμε χάος και για μεγάλες τιμές το σύστημα έχει περιοδική συμπεριφορά.

6 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- **Βιβλία**

Γιάννης Κυπριανίδης, Μαρία Πετράνη
Μη γραμμικά κυκλώματα, εκδόσεις Σύγχρονη Παιδεία

Ian Stewart
Παίζει ο θεός ζάρια; εκδοτικός οίκος ΤΡΑΥΛΟΣ

David ruelle
τύχη και χάος, εκδοτικός οίκος ΤΡΑΥΛΟΣ

James Gleick
Χάος μια νέα επιστήμη, εκδόσεις Κύτταρο

Νατσιάβας Σ.
Ταλαντώσεις δυναμικών συστημάτων με μη γραμμικά χαρακτηριστικά, εκδόσεις Ζήτη

- **Εργασίες**

  - Κουλούρης Ανδρέας

Ιστορική εισαγωγή στην επιστήμη το χάους

- Παναγιώτης Παπαδημητρίου

Διπλωματική εργασία : " Η συμβολή του Leonhard Eyler στην ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού"

- Καρακούλας Ευάγγελος

Διπλωματική εργασία : " Επίλυση του μοντέλου Spruce Budworm με την μέθοδο Runge Kutta

- Ευθύμιος Κοτσιάλος

Διδακτορική διατριβή : " Χαοτικά δυναμικά συστήματα: Συμβολή στη μελέτη αποχαοτικοποιησης δυναμικών συστημάτων και επαύξησης της γενικευμένης κανονικής μορφής Lorenz"

- Μπαλχανος Μιχάλης

Διπλωματική εργασία : "χάος στα ρευστά, Το σύστημα του Lorenz"

- Μπούμπαλου Μυρτώ

Διπλωματική εργασία : " Μέθοδοι θεωρίας διαταραχών για την μελέτη της εξίσωσης van der pol"

- Αγγελική Τσαποκούνη

Διπλωματική εργασία : " Οι εκθέτες Lyapunov και ο αριθμητικός υπολογισμός τους"

- Γερασόπουλος Βασίλειος

Διπλωματική εργασία : " Συμπίεση ψηφιακών εικόνων με βάση τη θεωρία των fractals"

- Τσακίρη Ευφροσύνη

Διδακτορική έρευνα : " Τα σύγχρονα μαθηματικά ως ερμηνεία και έμπνευση για παρεμβάσεις στον αστικό χώρο"

- Ρουμελιώτη Ελένη

Διπλωματική εργασία : " Εισαγωγή στα σύνολα Julia και στο σύνολο Mandelbrot"

- Χριστιά Σπύρος

Διπλωματική εργασία : " Η μέθοδος των πεπερασμένων αυξήσεων του Brook Taylor"

- Γεωργιάδης Σταύρος, Καζαντζή Νίκη, Καριπίδου Μαρία, Κοζάρης Γιώργος, Μήτου Σία, Νάτσο Στασινή, Νίκου Αλεξία, Σκουτέλας Γιώργος, Τερζόπουλος Παναγιώτης, Τσαβδαρά Αγνή, Τσαγκάρης Βασίλης, Τσιτσιντάς Παναγιώτης, Τσολακίδης Παντελής, Χαϊτίδης Ηλίας

Εργασία : "Η μαγεία των fractal"

- Αχτύπη Ειρήνη, Γαλανοπούλου Μαριάννα, Θεοτικά Κωνσταντίνου, Λαδια Δημήτρη

Εργασία : "Fractals"

- Βαφειάδης Αντώνιος, Ρίτση Μαρία-Μυρτώ

Πτυχιακή εργασία: "Σχεδιασμός και ανάπτυξη λογισμικού για την επίλυση συστήματος διαφορικών εξισώσεων"

➢ **Σημειώσεις μαθημάτων**

- Εθνικό και καποδιστριακό πανεπιστήμιο Αθηνών

- Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Επιστήμης και Τεχνολογίας Υλικών

Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση, σημειώσεις διαλέξεων και εργαστηρίων (2014)

- Σουρλάς Δημήτρης

Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

- Πλάτας Ι.

Πρόχειρες σημειώσεις διαφορικών εξισώσεων

- **Διαλέξεις/ομιλίες**

- Μπενουά Μάντελμπρο στο TED

- Στρατιωτική Σχολή Ευελπίδων

1ο εθνικό συνέδριο , Κρυπτογραφία και εφαρμογές στις ένοπλες δυνάμεις

- Καλαποθαράκος Κωνσταντίνος

Ένατη διάλεξη κέντρου ερευνών αστρονομίας και εφαρμοσμένων μαθηματικών

- **Ιστοσελίδες**

- gnomeskepistimi.wordpress.com/
- Κρυφτούλι με το χάος…
- *el.**wikipedia**.org*
- *en.**wikipedia**.org*
- www.google.gr
- http://news.in.gr/

"Απαραβίαστη χαοτική κρυπτογράφηση» δοκιμάζεται σε δίκτυο της Αθήνας".

- http://www.newscientist.com
- http://mathandliterature.blogspot.gr/2009/05/blog-post_20.html