ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ **Ε**ΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ **Ι**ΔΡΥΜΑ **ΠΕΛ**ΟΠΟΝΝΗΣΟΥ

ΣΧΟΛΗ **Δ**ΙΟΙΚΗΣΗΣ & **Ο**ΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ **Δ**ΙΟΙΚΗΣΗΣ **Ε**ΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ ΚΑΙ **Ο**ΡΓΑΝΙΣΜΩΝ

ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΕΡΙΛΗΠΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΦΩΤΟΥΛΑ ΑΡΓΥΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΑΚ. ΕΤΟΣ 2013-14

ΚΑΛΑΜΑΤΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΣΕΛ

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Χρήμα είναι το οικονομικό αγαθό, που χρησιμεύει σαν μέσο για να γίνονται οι συναλλαγές, αλλά είναι και μέτρο αποτίμησης της αξίας όλων των άλλων αγαθών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ (**Κ**) ή (**C**) (Capital) **λέγεται κάθε χρηματικό ποσό ή άλλο αγαθό, το οποίο όταν δανεισθεί ή αποταμιευθεί παράγει νέο χρηματικό ποσό και γενικότερα έχει παραγωγική δυνατότητα.**

ΤΟΚΟΣ (INTEREST) (**I**) **είναι η αμοιβή που παίρνει ο δανειστής από το δανειζόμενο, επειδή ο δεύτερος θα χρησιμοποιήσει ή θα επενδύσει το κεφάλαιο του πρώτου, για ένα ορισμένο χρονικό διάστημα.**

ΕΠΙΤΟΚΙΟ (INTEREST RATE) (**i**) είναι ο συντελεστής αύξησης του Κεφαλαίου και ορίζεται ως ο **τόκος κεφαλαίου μιας νομισματικής μονάδας, για μια ορισμένη χρονική περίοδο.**

ΧΡΟΝΟΣ (TIME)**(t)** είναι η χρονική διάρκεια της οικονομικής συναλλαγής.

Υπάρχουν δύο παραδοχές από μαθηματικής απόψεως για τον υπολογισμό του τόκου (δύο είδη κεφαλαιοποίησης):

I. Ότι το κεφάλαιο παράγει τόκο μόνο **κατά τη λήξη του συνολικού χρονικού διαστήματος τοκισμού και όχι ενδιάμεσα** (**τοκισμός με απλό τόκο ή απλή κεφαλαιοποίηση**). Εφαρμόζεται στις βραχυπρόθεσμες οικονομικές πράξεις, που έχουν συνήθως διάρκεια **μέχρι ένα έτος.**

II. Ότι το κεφάλαιο παράγει τόκο **κατά τη λήξη κάθε μίας χρονικής περιόδου τοκισμού (έτους, εξαμήνου, τριμήνου κ.λπ.).** Ο τόκος αυτός προστίθεται στο κεφάλαιο και την επόμενη χρονική περίοδο τοκίζεται το κεφάλαιο μαζί με τον τόκο της προηγούμενης περιόδου(**σύνθετη κεφαλαιοποίηση ή ανατοκισμός**). Εφαρμόζεται στις **μακροπρόθεσμες οικονομικές πράξεις**, που είναι συνήθως **διάρκειας πέραν του έτους**, για τη λύση προβλημάτων **ανατοκισμού**, **χρηματικών ροών και απόσβεσης δανείων (χρεολυσίας).**

Οριακά μπορούμε να υποθέσουμε ότι σε κάθε χρονική στιγμή το κεφάλαιο μας παράγει τόκο, ο οποίος ενσωματώνεται σ’ αυτό και το σύνολο παράγει τόκο την αμέσως επόμενη στιγμή και ο νέος τόκος πάλι ενσωματώνεται στο κεφάλαιο και αυτό συμβαίνει συνέχεια(**συνεχής παραγωγή τόκου** ή **συνεχής κεφαλαιοποίηση).**

ΑΠΛΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΠΟΙΗΣΗ Ή ΑΠΛΟΣ ΤΟΚΟΣ

Το μέγεθος του απλού τόκου (I) είναι ανάλογο **με τα τρία άλλα ποσά, δηλαδή** το Κεφάλαιο (K ή C)**,**το χρόνο (n ή t) **και** το επιτόκιο (i).

$$\boxed{\mathbf{I = K\,n\,i}}$$

Παρατηρήσεις

1. Κατά την εφαρμογή του παραπάνω τύπου πρέπει να προσέχουμε **ώστε ο χρόνος n να εκφράζεται στην ίδια χρονική περίοδο στην οποία αναφέρεται το επιτόκιο, δηλαδή αν το επιτόκιο είναι ετήσιο, εξαμηνιαίο, τριμηνιαίο κ.λ.π. πρέπει αντίστοιχα και η διάρκεια τοκισμού να είναι n έτη, n εξάμηνα, n τρίμηνα κ.λ.π.**

2. Αν το επιτόκιο είναι ετήσιο και η διάρκεια τοκισμού αναφέρεται σε μήνες, τότε ο τύπος του τόκου θα γίνει:

$\mathbf{I} = \dfrac{\mathrm{K}.\mu.i}{12}$ όπου ο αριθμός **μ** των μηνών τοκισμού εκφράζεται σε κλάσμα του έτους.

3. α) Αν το επιτόκιο είναι ετήσιο και η διάρκεια τοκισμού αναφέρεται σε ημέρες, τότε ο βασικός τύπος του τόκου θα γίνει: $\mathbf{I} = \dfrac{\mathrm{K}.\nu.i}{365}$ **ή** $\mathbf{I} = \dfrac{\mathrm{K}.\nu.i}{366}$ για δίσεκτο έτος,

όπου ο αριθμός των ημερών τοκισμού **ν**, εκφράζεται πάλι σε κλάσμα του έτους (**έτος πολιτικό**).

β) Αν στον παραπάνω τύπο θεωρήσουμε, για διευκόλυνση των υπολογισμών, ότι το έτος περιλαμβάνει 360 ημέρες και κάθε μήνας 30 ημέρες (**έτος εμπορικό)**, ο τύπος γίνεται: $\mathbf{I} = \dfrac{\mathrm{K}.\nu.i}{360}$

γ) Επειδή ο τρόπος υπολογισμού με εμπορικό έτος είναι άδικος για τον οφειλέτη, μια συμβιβαστική λύση είναι να θεωρείται ότι το έτος έχει 360 ημέρες, αλλά ο κάθε μήνας να έχει τον πραγματικό αριθμό ημερών του, όπως και στο πολιτικό έτος **(έτος μικτό).** Ο τύπος είναι πάλι: $\mathbf{I} = \dfrac{\mathrm{K}.\nu.i}{360}$

<u>Τοκάριθμος- Σταθερός Διαιρέτης</u>

Τους υπολογισμούς στην εύρεση του τόκου όταν ο χρόνος δίνεται σε ημέρες, διευκολύνουν **ο τοκάριθμος** και **ο σταθερός διαιρέτης:**

Αν πάρουμε τους τύπους $\mathbf{I} = \dfrac{\mathrm{K}.\nu.i}{360}$ **και** $\mathbf{I} = \dfrac{\mathrm{K}.\nu.i}{365}$ και διαιρέσουμε τους όρους του κλάσματος δια i, θα έχουμε:

I = $\frac{K.\nu.i/i}{360/i}$ **ή I =** $\frac{K.\nu}{360/i}$ **και I =** $\frac{K.\nu.i/i}{365/i}$ **ή I =** $\frac{K.\nu}{365/i}$

Το γινόμενο **Κν** λέγεται **Τοκάριθμος** και συμβολίζεται με **Ν**.

Το πηλίκο **360/i** ή **365 / i** λέγεται **Σταθερός διαιρέτης** και συμβολίζεται με **Δ.** Τότε ο τύπος γίνεται:

$$I = \frac{K.\nu}{\Delta} \text{ ή } I = \frac{N}{\Delta} \quad \text{όπου } \Delta = \frac{360}{i} \text{ ή } \Delta = \frac{365}{i}.$$

<u>Τελική Αξία</u>

Η τελική αξία **Kn** ενός κεφαλαίου **Ko** μετά απο **n** έτη θα είναι:

Kn = Ko +I δηλ. **Kn =Ko +Ko· n· i ή**

Kn = Ko (1+ni)

Όταν το επιτόκιο είναι ετήσιο και ο χρόνος εκφράζεται σε μήνες, η τελική αξία θα είναι :

$$K\mu = Ko\left(1 + \frac{\mu}{12} i\right)$$

Όταν το επιτόκιο είναι ετήσιο και ο χρόνος εκφράζεται σε ημέρες, η τελική αξία θα είναι :

$$K\nu = Ko\left(1 + \frac{\nu}{365} i\right) \text{ και } K\nu = Ko\left(1 + \frac{\nu}{360} i\right) \text{ και}$$

$$K_\nu = Ko + \frac{K_0 \nu}{\Delta} \quad \text{ή} \quad K_\nu = Ko\left(1 + \frac{\nu}{\Delta}\right)$$

Οι παραπάνω τύποι μπορούν να λυθούν ως προς Ko και τότε θα δώσουν την παρούσα αξία (αρχικό κεφάλαιο) συναρτήσει της τελικής του αξίας.

<u>Πρόβλημα:</u> **Σε πόσο χρόνο ένα κεφάλαιο διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κ.λπ.**

Λύση: Για να το λύσουμε, μπορούμε να αντικαταστήσουμε στον κατάλληλο τύπο,

όπου **Kn = 2Ko** **Kn = 3Ko** κ.λ.π.

Π.χ. αν αντικαταστήσουμε στον τύπο: **Kn=Ko (1+ni),** όπου **Kn = 2Ko,** θα βρούμε **n=** $\frac{1}{i}$**.** Αν θέσουμε στον τύπο $K_\nu = Ko(1+ \frac{\nu}{\Delta})$**,** **Kν =2Ko**, θα βρούμε **ν=Δ.**

Αν θέσουμε **Kν = 3 Ko**, θα βρούμε **ν = 2Δ.**

Άρα το κεφάλαιο θα διπλασιασθεί σε n = $\frac{1}{i}$ **έτη ή σε τόσες ημέρες, όσος είναι ο σταθερός διαιρέτης.**

Επίσης θα τριπλασιασθεί σε μέρες ίσες με το διπλάσιο του σταθερού διαιρέτη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΠΛΟΥ ΤΟΚΟΥ

1) Ένα κεφάλαιο τοκίστηκε προς 21% για 6 έτη και έγινε μαζί με τους τόκους του 3.390€. Ποιό ήταν το αρχικό κεφάλαιο και ποιός ο τόκος του; (απ. K = 1.500€, I = 1.890€)

2) Κεφάλαιο τοκίστηκε επί 180 ημέρες προς 15% και έγινε με τον τόκο του 430.000€. Ποιό είναι το κεφάλαιο ; (έτος μικτό). (απ. K = 400.000€)

3)Κεφάλαιο τοκίσθηκε προς 18% επί 5 μήνες και το τοκοκεφάλαιο τοκίσθηκε πάλι προς 24% και έδωσε μηνιαίο τόκο 4.300€. Ποιό ήταν το αρχικό κεφάλαιο; (απ.200.000 €)

4) Κεφάλαιο τοκίσθηκε επί 90 ημέρες και 145.250€. Το ποσό αυτό ξανατοκίσθηκε για άλλες 120 ημέρες και έγινε 152.512,5€. Να βρεθεί το αρχικό κεφάλαιο και το επιτόκιο (έτος μικτό).

(απ. i=15%**,** Ko =140.000€)

5) Στις 20 Φεβρουαρίου, ένας έμπορος δανείσθηκε ένα ποσό με 30% και με τη συμφωνία να το εξοφλήσει την 20η Απριλίου του ίδιου έτους με έτος μικτό. Ο πιστωτής κράτησε προκαταβολικά τον τόκο και ο έμπορος εισέπραξε 237.500€. Ποιό είναι το οφειλόμενο ποσό;

(απ. K=250.000€)

6) Ο έμπορος Ε δανείσθηκε από τον πιστωτή Π ένα χρηματικό ποσό προς 25% για 90 ημέρες. Ο Π αφού κράτησε προκαταβολικά τον τόκο έδωσε στον Ε 562.500€. Να βρεθεί ο τόκος και το ποσό που δανείστηκε ο Ε. Έτος εμπορικό. (απ. I =37.500 €, K= 600.000€)

7) Μια βιομηχανία δανείσθηκε ένα χρηματικό ποσό για 72 ημέρες προς25%. Η τράπεζα κράτησε προκαταβολικά τον τόκο και η επιχείρηση έλαβε τελικά 950.000€. Ποιό είναι το ποσό που δανείσθηκε η επιχείρηση; (έτος μικτό). (απ. K=1.000.000€)

8) Ο Α ζήτησε από τον Β δάνειο 730.000€, για 120 ημέρες με ετήσιο επιτόκιο 20% και έτος πολιτικό. Αν ο τόκος κρατήθηκε προκαταβολικά, τι ποσό πήρε στα χέρια του ο Α;

(απ.682.000€)

9) Ένας έμπορος πλήρωσε στις 25 Ιανουαρίου 524.000€, για τόκους και κεφάλαιο ενός δανείου που είχε πάρει στις 30 Αυγούστου του προηγούμενου έτους με επιτόκιο 12%. Ποιό ήταν το αρχικό χρέος; Έτος μικτό. (απ.500.000€)

10) Κάποιος κατέθεσε σε μια τράπεζα ένα ποσό προς 15% και ένα ίσο ποσό προς 18 %. Μετά από 18 μήνες πήρε συνολικά τόκους και κεφάλαιο 299.400€.Να βρεθούν τα ποσά που κατέθεσε και οι αντίστοιχοι τόκοι. (απ.120.000€, τόκοι 27.000€, 32.400€)

11) Ένα κεφάλαιο τοκίσθηκε επί 80 ημέρες και έγινε με τους τόκους του 208.000€. Το ποσό αυτό ξανατοκίσθηκε για άλλες 120 ημέρες με το ίδιο επιτόκιο και έγινε 220.480€. Να βρεθεί το αρχικό κεφάλαιο και το επιτόκιο, αν ισχύει έτος μικτό. (απ.200.000€)

12) Τι ποσό πρέπει να ζητήσει κάποιος σαν δάνειο με ετήσιο επιτόκιο 24% για 150 ημέρες, ώστε αν κρατηθεί προκαταβολικά ο τόκος, να εισπράξει 100.000€; (απ. 111.111,11€)

13) Κάποιος κατέθεσε στις 21-3-11ένα κεφάλαιο. Στις 2-9-11 τα χρήματα αυτά είχαν γίνει 213.750€. Το ποσό αυτό ξανατοκίστηκε για 160 ημέρες με το ίδιο επιτόκιο και έγινε 228.000€. Να βρείτε το αρχικό κεφάλαιο και το επιτόκιο. Έτος μικτό. (απ.200.000€, 15%)

14) Κάποιος κατέθεσε σε μια τράπεζα 250€ στις 4 Ιουλίου και 100€ στις 20 Οκτωβρίου. Στις 31 Δεκεμβρίου του ιδίου έτους ο συνολικός τόκος στο βιβλιάριο ήταν 29€. Να βρεθεί το επιτόκιο. (απ.20%)

15) Δύο κεφάλαια διαφέρουν κατά 5.000€. Το μεγαλύτερο τοκίσθηκε με επιτόκιο 4% και το μικρότερο με 5%. Αν στα κεφάλαια αυτά προστεθούν και οι ετήσιοι τόκοι τους, θα γίνουν ίσα. Να βρεθούν τα αρχικά κεφάλαια. (απ.525.000€,520.000€)

16) Δύο κεφάλαια τοκίσθηκαν το πρώτο στις 31 Ιανουαρίου και το δεύτερο στις 16 Απριλίου του ιδίου έτους με επιτόκιο 9% και 18% αντίστοιχα. Αν το δεύτερο είναι 2πλάσιο του πρώτου και στις 8 Οκτωβρίου του ιδίου έτους έδωσαν και τα δύο μαζί τελική αξία 582.750€,να βρείτε τα δύο κεφάλαια. (απ.180.000€, 360.000€)

17) Κεφάλαιο 1.000€ τοκίζεται με επιτόκιο 16% με απλό τόκο. α) Σε πόσο χρονικό διάστημα θα διπλασιαστεί; β) Σε πόσο χρονικό διάστημα θα τριπλασιαστεί;(απ.α) 6,25 έτη β) 12,5 έτη)

18) Κάποιος κέρδισε στο λαχείο ένα ποσό και δάνεισε αμέσως τα 6/10 του ποσού με ετήσιο επιτόκιο 24% ενώ το υπόλοιπο το κατέθεσε με ετήσιο επιτόκιο 21% 8 μήνες αργότερα. Πόσα χρήματα κέρδισε, αν 3 χρόνια μετά την κατάθεση πήρε τόκο 11.700€; (απ. 15.000€)

19) Κάποιος δάνεισε με απλό τόκο 500.000€ με επιτόκιο 24%. Αργότερα μείωσε το επιτόκιο σε 18%. Να βρείτε το χρόνο που μεσολάβησε μέχρι την αλλαγή του επιτοκίου αν μετά από ένα έτος πήρε συνολικά τόκο 97.500€. Έτος εμπορικό. (απ. μ=3 μήνες)

20) Ένας πατέρας θέλει να καταθέσει 100.000€ με απλό τόκο και επιτόκιο 20% για τα δύο παιδιά του, ηλικίας σήμερα 8 και 13 ετών. Πως πρέπει να μοιράσει το ποσό, ώστε τα δύο μερίδια να δώσουν ίσες τελικές αξίες όταν το κάθε παιδί γίνει 18 ετών;

(απ. 40.000€ και 60.000€)

21)Ένας καταθέτης έχει στην τράπεζα 30.000€ σ' ένα λογαριασμό με επιτόκιο 15% και 10.000€ σε άλλο λογαριασμό με επιτόκιο 18%. Αν μέχρι σήμερα το πρώτο έχει δώσει τόκο 6400€ και το δεύτερο 3600€, μετά από πόσο χρονικό διάστημα ο συνολικός τόκος που θα έχει δώσει το πρώτο θα είναι διπλάσιος από τον συνολικό τόκο που θα έχει δώσει το δεύτερο. Έτος μικτό. (απ. ν=320 ημέρες)

ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗ

Προεξόφληση λέγεται η διαδικασία με την οποία ο κάτοχος της συναλλαγματικής (εκδότης ή οπισθογράφος) την μεταβιβάζει (συνήθως σε Τράπεζα) πριν από τη λήξη της και εισπράττει ένα χρηματικό ποσό (Α) μικρότερο από το ποσό που γράφει επάνω η συναλλαγματική (Κ).

Το ποσό που γράφει επάνω λέγεται **Ονομαστική Αξία (Κ)** της συναλλαγματικής και το ποσό που θα εισπράξει ο κομιστής κατά την προεξόφληση λέγεται **Παρούσα Αξία (Α).** Η διαφορά **Κ-Α** είναι το ποσό που θα κρατήσει η Τράπεζα σαν τόκο για το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από την ημέρα προεξόφλησης μέχρι την ημέρα λήξης της συναλλαγματικής.

Ο τόκος αυτός λέγεται προεξόφλημα ή υφαίρεση (Ε).

Το προεξόφλημα **Ε** υπολογίζεται με απλό τόκο όταν ο χρόνος προεξόφλησης είναι μικρός. Για χρονικά διαστήματα πάνω από ένα έτος το προεξόφλημα υπολογίζεται με ανατοκισμό.

Στην ουσία η προεξόφληση είναι μια μορφή δανεισμού χρημάτων και μάλιστα περίπτωση δανεισμού στην οποία η Τράπεζα κρατάει προκαταβολικά τον Τόκο.

-Το κεφάλαιο δανεισμού **Κ** είναι η ονομαστική αξία **Κ** της συναλλαγματικής.

-Το ελαττωμένο κεφάλαιο **Κ*** που θα εισπράξει στην πραγματικότητα ο δανειζόμενος είναι η παρούσα αξία **Α** της συναλλαγματικής.

-Ο τόκος που θα κρατήσει η Τράπεζα είναι το προεξόφλημα **Ε**.

Ισχύει η σχέση:

Ονομαστική αξία = Παρούσα αξία + Προεξόφλημα ή συμβολικά: **Κ = Α + Ε**

Χρόνος προεξόφλησης λέγεται το χρονικό διάστημα **από την ημέρα προεξόφλησης μέχρι την ημέρα λήξης της συναλλαγματικής**.

Αν και υπάρχουν διαφορές στις Τράπεζες στον τρόπο που υπολογίζουν το χρόνο προεξόφλησης, συνήθως υπολογίζονται σαν τοκοφόρες και η ημέρα προεξόφλησης και η ημέρα λήξης της συναλλαγματικής.

Επιτόκιο προεξόφλησης λέγεται το **επιτόκιο υπολογισμού του προεξοφλήματος.** Το ύψος του καθορίζεται από την Τράπεζα Ελλάδος και κυμαίνεται γύρω στο 25%. Για να λύσουμε όλα τα σχετικά προβλήματα, βασιζόμαστε στη θεμελιώδη σχέση:

Ονομ. αξία = Παρούσα αξία + Προεξόφλημα

Υπάρχουν δύο είδη προεξόφλησης. Η **εξωτερική** και η **εσωτερική**.

Εξωτερική λέγεται η προεξόφληση όταν το προεξόφλημα υπολογίζεται επί της ονομαστικής αξίας **K** της συναλλαγματικής με τη μέθοδο υπολογισμού απλού τόκου.

Εσωτερική λέγεται η προεξόφληση όταν το προεξόφλημα υπολογίζεται επί της παρούσας αξίας **A** της συναλλαγματικής, επίσης με απλό τόκο.

Εξωτερική προεξόφληση

Στην εξωτερική προεξόφληση το προεξόφλημα λέγεται **εξωτερικό (Ε)** και υπολογίζεται πάνω στην ονομαστική αξία (**K**) με τους τύπους του απλού τόκου: $\mathbf{E = K \cdot n \cdot i}$ **ή** $\mathbf{E = \frac{K \cdot \mu \cdot i}{12}}$ **ή** $\mathbf{E = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{365\,(\acute{\eta}\,360)}}$ **ή** $\mathbf{E = \frac{K \cdot \nu}{\Delta}}$

Η παρούσα αξία (**A**) στην εξωτερική προεξόφληση υπολογίζεται από τη θεμελιώδη σχέση της προεξόφλησης:

$$\mathbf{K = A + E} \qquad \acute{\eta} \qquad \mathbf{A = K - E}$$

και αν αντικαταστήσουμε το Ε με κάποιον από τους παραπάνω τύπους, π.χ τον τελευταίο, θα έχουμε:

$$\mathbf{A = K - \frac{K \cdot \nu}{\Delta}} \qquad \mathbf{(1)}$$

Επειδή όμως στην πράξη η Τράπεζα κάνει και άλλες κρατήσεις, για να βρούμε το πραγματικό ποσό που θα πρέπει να πάρει ο πιστωτής πρέπει να αφαιρέσουμε και τις κρατήσεις αυτές.

Αν παραστήσουμε την προμήθεια με **θ,** τα διάφορα έξοδα με το **ε** και το χαρτόσημο με το **χ** θα ισχύουν τα εξής:

Το χαρτόσημο υπολογίζεται συνήθως εφάπαξ άρα αφαιρείται απλώς.

Η προμήθεια υπολογίζεται σε ποσοστό επί της ονομαστικής αξίας για κάθε μήνα προεξόφλησης και τα μέρη του μήνα θεωρούνται ολόκληροι μήνες. Δηλαδή θα αφαιρέσουμε ένα ποσοστό **Κθ/100**

για την προμήθεια κατά μήνα και για ολόκληρους μήνες. Τα έξοδα υπολογίζονται σαν ποσοστό κατά εκατοντάδα και για ολόκληρη εκατοντάδα ή κατά χιλιάδα και για ολόκληρη χιλιάδα και θα αφαιρεθεί ένα ποσοστό Κε/100**.** Έτσι ο τελικός τύπος της πραγματικής αξίας θα είναι:

$$\mathbf{A = K - \frac{K \cdot \nu}{\Delta} - \frac{K \cdot \theta}{100} - \frac{K \cdot \varepsilon}{100}} - \chi \qquad \mathbf{(2)}$$

Εσωτερική προεξόφληση

Στην εσωτερική προεξόφληση το προεξόφλημα λέγεται **εσωτερικό ($\mathbf{E_1}$)** και υπολογίζεται πάνω στην παρούσα αξία, είναι δηλαδή ο τόκος της παρούσας αξίας. Αν συμβολίσουμε με $\mathbf{A_1}$ τη νέα παρούσα αξία, το εσωτερικό προεξόφλημα θα είναι: $\mathbf{E_1 = \frac{A1 \cdot \nu}{\Delta}}$.

Το άθροισμα τους θα πρέπει να μας δώσει την ονομαστική αξία **Κ**.

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1), οπότε θα έχουμε: $\mathbf{K} = \mathbf{A_1} + \frac{\mathbf{A1 \cdot \nu}}{\Delta}$ ή $\mathbf{K} = \mathbf{A_1} \left(1 + \frac{\nu}{\Delta} \right)$ ή

$$\mathbf{K} = \mathbf{A_1} \frac{\mathbf{\Delta + \nu}}{\Delta} \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{A_1} = \frac{\mathbf{K \cdot \Delta}}{\Delta + \nu} \qquad \textbf{(2)}$$

Ο τύπος (2) μας δίνει την παρούσα αξία $\mathbf{A_1}$ από την ονομαστική **Κ**. Και το προεξόφλημα θα υπολογισθεί εύκολα από τους τύπους του απλού τόκου :

$$\mathbf{E_1} = \frac{\mathbf{A1 \cdot \nu}}{\Delta} \quad \text{ή} \quad \mathbf{E_1} = \frac{\frac{\mathbf{K \cdot \Delta}}{\Delta + \nu} \cdot \mathbf{\nu}}{\Delta} \quad \text{ή} \quad \mathbf{E_1} = \frac{\mathbf{K \cdot \nu}}{\Delta + \nu} \qquad \textbf{(3)}$$

Παρατήρηση: **Η εξωτερική προεξόφληση είναι άδική για τον οφειλέτη, γιατί η τράπεζα υπολογίζει τον τόκο επί της ονομαστικής αξίας, ενώ προσφέρει μικρότερο ποσό (την παρούσα αξία). Το μέγεθος της αδικίας φαίνεται από το εξής:**

Αν στον τύπο $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{K \cdot \nu}}{\Delta}$ γίνει $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\Delta}$, τότε **Ε = Κ** και για $\boldsymbol{\nu} > \boldsymbol{\Delta}$, θα είναι **Ε > Κ,**

δηλαδή στην εξωτερική προεξόφληση, το προεξόφλημα μπορεί να γίνει ίσο ή και μεγαλύτερο (!) από την ονομαστική αξία.

Αν γίνει το ίδιο στον τύπο της εσωτερικής προεξόφλησης $\mathbf{E} = \frac{K.\nu}{\Delta + \nu}$**,** παρατηρούμε ότι πάντα θα ισχύει **Ε < Κ,** όποια τιμή και αν πάρει το ν.

Πραγματικό επιτόκιο προεξόφλησης

Επειδή η τράπεζα κατά την προεξόφληση κρατά όχι μόνο το προεξόφλημα δηλαδή τον τόκο αλλά και διάφορα άλλα έξοδα, ονομάζουμε **πραγματικό επιτόκιο προεξόφλησης j το υποθετικό εκείνο επιτόκιο με το οποίο αν τοκιζόταν το καθαρό ποσό που θα πάρει αυτός που δίνει την συναλλαγματική για προεξόφληση, θα έδινε τόκο ίσο με το προεξόφλημα + έξοδα σε χρόνο ίσο με το χρόνο προεξόφλησης.**

Αν λοιπόν η συναλλαγματική προεξοφλείται ν ημέρες πριν τη λήξη της, το πραγματικό επιτόκιο προεξόφλησης θα βρεθεί από τη σχέση:

$\mathbf{K - A} = \frac{\mathbf{A\,\nu\,j}}{\mathbf{360}}$ ή $\mathbf{K - A} = \frac{\mathbf{A\,\nu\,j}}{\mathbf{365}}$**.** Λύνοντας ως προς j θα έχουμε :

$$\mathbf{j} = \frac{\mathbf{(K - A)\ 360}}{\mathbf{A\,\nu}} \quad \text{ή} \quad \mathbf{j} = \frac{\mathbf{(K - A)\ 365}}{\mathbf{A\,\nu}}$$

Παράδειγμα. Μια τράπεζα προεξοφλεί γραμμάτιο 2000 €, 60 ημέρες πριν τη λήξη με επιτόκιο 18% και κρατάει επιπλέον για προμήθεια και για έξοδα 1,5%. Με ποιό πραγματικό επιτόκιο έγινε η προεξόφληση; (Έτος μικτό).

Λύση Δ=360/0,18 =2000

Α= Κ - $\frac{K\cdot\mathbf{\nu}}{\Delta}$ - $\frac{K\cdot(\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\varepsilon})}{100}$ =2000 - $\frac{2000\cdot 60}{2000}$ - $\frac{2000\cdot 1{,}5}{100}$ = 2000 - 60 - 30 = 1910€.

Αντικαθιστώντας στον τύπο του πραγματικού επιτοκίου θα έχουμε: J =0,282722 ή

J = 28 % περίπου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗ

1. Μια συναλλαγματική ονομαστικής αξίας 3000€ που έληγε στις 30 Ιανουαρίου 2012 προεξοφλήθηκε στις 19-12-11 προς 24%. Να βρεθεί το εξωτερικό και το εσωτερικό προεξόφλημα καθώς και το καθαρό ποσό που εισέπραξε ο εκδότης της, αν η τράπεζα κράτησε: προμήθεια 1,5 % και πάγια έξοδα 30€. Στις τοκοφόρες ημέρες η τράπεζα υπολογίζει και τις 2 επιπλέον για το νόμιμο περιθώριο πληρωμής της συναλλαγματικής. Έτος μικτό.

Λύση **:** ν = 45 Δ = 360/0,24 = 1500

Ε = $\frac{\mathrm{K}\cdot\nu}{\Delta}$ = $\frac{3000 \times 45}{1500}$ = 90€.

$\mathbf{E_1}$ **=** $\frac{\mathrm{K}\cdot\nu}{\Delta+\nu}$ = $\frac{3000 \times 45}{1545}$ = 87,38€.

Προμήθεια: Κ·θ/100 = 3000 x1,5/100 = 45€.

Α = Κ - $\frac{\mathrm{K}\cdot\nu}{\Delta}$ - $\frac{\mathrm{K}\cdot\theta}{100}$ -30 = 3000 - 90 - 45 -30 = 2835€.

A_1 = Κ - $\frac{\mathrm{K}\cdot\nu}{\Delta+\nu}$ - $\frac{\mathrm{K}\cdot\theta}{100}$ -30 = 3000 - 87,38 – 45 - 30 = 2.837,62€.

2. Να βρείτε την παρούσα αξία συναλλαγματικής 2500€, που έληγε στις 18/4/2012 και προεξοφλήθηκε στις 20/12/2011, με εξωτερική προεξόφληση, επιτόκιο 24% και έτος μικτό. Η τράπεζα κράτησε εκτός από τον τόκο, προμήθεια 1% κατά μήνα , έξοδα 0,5% και Ε.Φ.Τ.Ε 3 % .

Λύση: ν = 11+31+29+31+18 = 120, Δ = 360/0,24 = 1500΄

Προμήθεια(θ): 1% x 5μήνες = 5% επί του Κ.

Προεξόφλημα (Τόκος): Ε = Κ·ν/Δ = 2500 x 120/1500 = 200€

Προμήθεια: θ = Κ·5% = 2500 x 5% = 125€

Έξοδα: ε = Κ·0,5% = 2500 x0,5% = 12,5€

Μερικό Σύνολο κρατήσεων: 200+125+12,5 = 337,5€

Ε.Φ.Τ.Ε. = 337.5 x 3% = 10,125€

Γενικό Σύνολο κρατήσεων:337,5+10,125 = 347,625€

Παρούσα αξία: Α = 2500 – 347,625 = 2152,375€.

3. Ένα γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 1200 Ευρώ, προεξοφλήθηκε εξωτερικά με ετήσιο επιτόκιο 20%, 75 ημέρες πριν τη λήξη του, με έτος μικτό. Η τράπεζα κράτησε προμήθεια 1% το μήνα και για ολόκληρους μήνες, 0,5% έξοδα καθώς και Ε.Φ.Τ.Ε. 3% επί του συνόλου των κρατήσεων. Να βρείτε το πραγματικό επιτόκιο προεξόφλησης.

4. Ένας έμπορος έχει στα χέρια του μια συναλλαγματική έναντι χρέους 2000 Ευρώ, που λήγει 100 ημέρες από σήμερα και εκδόθηκε με επιτόκιο 20%. Εάν ο έμπορος την προεξοφλήσει 50 ημέρες πριν τη λήξη της με επιτόκιο προεξόφλησης 25% να βρείτε το εξωτερικό προεξόφλημα και το ποσό που θα εισπράξει αν επί πλέον κρατήθηκε προμήθεια 2% κατά μήνα, έξοδα 1% και Ε.Φ.Τ.Ε. 3% επί του συνόλου των κρατήσεων.

5. Μια συναλλαγματική 2500€, προεξοφλήθηκε εξωτερικά 90 ημέρες πριν τη λήξη της και έφερε παρούσα αξία 2350€. Να βρείτε το επιτόκιο προεξόφλησης, αν υποθέσουμε ότι δεν υπήρξαν άλλες κρατήσεις. Έτος μικτό.

Λύση: Κ = 2500€, ν = 90, Α = 2350€. Άρα ο τόκος (Προεξόφλημα) θα είναι:2500 - 2350 = 150€. Από τον τύπο του τόκου, θα έχουμε: Ε = Κ·ν/Δ, άρα: 150 = 2500 x90/Δ ή 150 = 225000/Δ ή 150·Δ = 225.000. Άρα: Δ = 225.000/150 = 1500.

Και επειδή $Δ = \frac{360}{i}$, θα έχουμε: $1500 = \frac{360}{i}$. Από αυτό έπεται ότι i = 360/1500 = 0,24 =24%.

6. Αγόρασε κάποιος είδη αξίας 2000€ και για να τα εξοφλήσει υπογράφει συναλλαγματική που λήγει μετά από 90 ημέρες, με επιτόκιο 25%. Να βρείτε την ονομαστική αξία της συναλλαγματικής αν χρεωθεί επί πλέον και προμήθεια 3% συνολικά και πάγια έξοδα 5‰. Εξωτερική προεξόφληση. Έτος μικτό.

ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΠΟΙΗΣΗ (ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ)

Ανατοκισμός ή **σύνθετος τόκος** ή **σύνθετη κεφαλαιοποίηση λέγεται το σύστημα κεφαλαιοποίησης στο οποίο ο χρόνος τοκισμού χωρίζεται σε ίσες χρονικές περιόδους και ο τόκος κάθε χρονικής περιόδου προστίθεται στο κεφάλαιο και αποτελεί παραγωγικό κεφάλαιο για τις επόμενες χρονικές περιόδους.**

Η τελική του κεφαλαίου K_o στο τέλος της **n** χρονικής περιόδου, δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\mathbf{K_n = K_0 (1 + i)^n} \qquad \mathbf{(1)}$$

Ο αριθμός $(1+ i)^n$ λέγεται συντελεστής τελικής αξίας ανατοκισμού και δίνεται από ειδικούς πίνακες για τα διάφορα i και n. Στον τύπο αυτό το **n** παριστάνει τον αριθμό των χρονικών περιόδων κατά τις οποίες γίνεται ο ανατοκισμός. Δηλαδή αν ο ανατοκισμός είναι ετήσιος το επιτόκιο θα είναι επίσης ετήσιο και το **n** θα παριστάνει έτη, αν είναι εξαμηνιαίος θα πρέπει να μετατραπεί ο χρόνος σε εξάμηνα και να αντικατασταθεί το ετήσιο επιτόκιο με το ανάλογο εξαμηνιαίο. Οι τιμές του $(1+ i)^n$ δίνονται από ειδικούς πίνακες. Μπορούν επίσης να βρεθούν αμέσως και με ένα " κομπιουτεράκι " που έχει το πλήκτρο $\mathbf{y^x}$.

Παράδειγμα 1. Κεφάλαιο 3200€ ανατοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 16%. Τι ποσό θα έχει σχηματισθεί μετά από 15 έτη;

Λύση. $K_{15} = 3200 (1 + 0{,}16)^{15}$ = 320.000€ x$1{,}16^{15}$ = 3200€ x 9,2655222 = 29649,67€.

Παράδειγμα 2: Κεφάλαιο 250€ ανατοκίζεται κάθε εξάμηνο με εξαμηνιαίο επιτόκιο 6%. Τι ποσό θα έχει σχηματισθεί μετά 5 έτη και 6 μήνες;

Λύση. Μετατρέπουμε το χρόνο σε εξάμηνα: n = (5x2) + 1 = 11

$K_n = K_o(1+i)^n$ άρα K_{11} = 250€ x $1{,}06^{11}$ = 250€ x 1,8982985 = 474,574625€.

Εύρεση του αρχικού κεφαλαίου

Αν είναι γνωστή η τελική αξία K_n και ζητάμε το αρχικό κεφάλαιο K_o, που όταν ανατοκισθεί για n χρονικές περιόδους με επιτόκιο i , γίνεται ίσο με K_n, τότε θα λύσουμε τον τύπο (1) του ανατοκισμού ως προς K_o:

$$K_n = K_0 \mathbf{(1 + i)}^n \Leftrightarrow \mathbf{K_o = K_n / (1 + i)^n} \quad \textbf{ή} \quad \mathbf{K_o = K_n (1 + i)^{-n}} \qquad \mathbf{(2)}$$

Υπάρχουν ειδικοί πίνακες (οικονομικοί πίνακες), που δίνουν απ' ευθείας την ποσότητα

$\mathbf{(1+ i)^{-n}}$.

Συνήθως χρησιμοποιείται το σύμβολο: $\mathbf{U = \frac{1}{1+i} = (1 + i)^{-1}}$.

Οπότε οι πίνακες αναφέρουν τον συντελεστή παρούσας αξίας ως $(1 + i)^{-n}$ ή ως U^n .

Και ο τύπος (2) γίνεται: $\mathbf{K_o = K_n U^n}$ **(3)**

Παράδειγμα. Να βρεθεί το κεφάλαιο που ανατοκίζεται κάθε χρόνο με ετήσιο επιτόκιο 16% επί 15 χρόνια και γίνεται 2.779,6562€.

Λύση. $K_o = K_n\ 1+i)^{-n}$ = 2.779,6562 x $1{,}16^{-15}$ = 2.779,6562 x 0,1079270 = 299,99995€.

Σημείωση. Το $(1 + i)^{-n}$ μπορεί να βρεθεί με " κομπιουτεράκι " που έχει

το πλήκτρο y^x. Π.χ. το $1{,}16^{-15}$ βρίσκεται αν πατήσουμε τα πλήκτρα με τη σειρά :

1,16 $\mathbf{y^x}$ 15 **+/- =** και θα εμφανισθεί ο αριθμός 0,1079270.

Ανάλογα επιτόκια

Ας ονομάσουμε **i** το επιτόκιο που αναφέρεται σε μια χρονική περίοδο π και **i'** το επιτόκιο που αναφέρεται σε υποδιαίρεση της περιόδου **π**, έστω στην περίοδο **π'**$=\frac{1}{\lambda}$ **π. Αν i'** $= \frac{i}{\lambda}$, τότε το **i'** λέγεται **ανάλογο επιτόκιο ή ονομαστικό επιτόκιο του i για τη χρονική μονάδα π'.**

Επίσης αν **i** είναι το επιτόκιο μιας χρονικής περιόδου **π = μπ***(η περίοδος **π** είναι πολλαπλάσιο της περιόδου π*) και ισχύει ότι **i = μ i*** τότε το i* θα λέγεται **ανάλογο επιτόκιο** του i για τη χρονική μονάδα π*. Π.χ. Αν έχουμε ετήσιο επιτόκιο i = 18%, τότε το **ανάλογο εξαμηνιαίο επιτόκιο** του i θα είναι: i* = 0,18/2 = 0,09 = 9% . Επίσης το **ανάλογο τετραμηνιαίο** θα είναι: i* = 0,18/3 = 0,06 = 6%. Αν έχουμε τριμηνιαίο επιτόκιο i* = 4% , τότε το **ανάλογο ετήσιο επιτόκιο** του i* θα είναι: i = 4x4 = 16%.

Ισοδύναμα επιτόκια

Δύο επιτόκιο **i** και **i'** που αναφέρονται σε διαφορετικές χρονικές περιόδους ***π*** και ***π'*** λέγονται **ισοδύναμα** όταν ***ίσα κεφάλαια τοκιζόμενα με αυτά τα επιτόκια δίνουν ίσες τελικές αξίες για οποιοδήποτε χρονικό διάστημα.***

Για να βρούμε τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στα ισοδύναμα επιτόκια δύο διαφορετικών χρονικών περιόδων, χωρίζουμε τη χρονική περίοδο **π (**στην οποία αναφέρεται το επιτόκιο **i),** σε **λ** ίσες χρονικές περιόδους **π',** όπου **λ** φυσικός αριθμός. (Αν το π είναι 1 έτος τότε το λ θα είναι 2,3,4,6, ή 12, οπότε το έτος χωρίζεται αντίστοιχα σε εξάμηνα, τετράμηνα, τρίμηνα, διμηνίες ή μήνες). Έστω $\mathbf{i_\lambda}$ το επιτόκιο κάθε μιας περιόδου **π',** που είναι ισοδύναμο με το **i.** Τότε η τελική αξία ενός κεφαλαίου Κ στο τέλος της πρώτης περιόδου **π** θα είναι: $\mathbf{K_1 = K(1+ i)}$.

Επίσης η τελική αξία του **Κ** στο τέλος της πρώτης περιόδου **π**, όταν ανατοκίζεται σε κάθε χρονική περίοδο **π'** $=\frac{1}{\lambda}$ **π** θα είναι: $\mathbf{K_\lambda = K(1 + i_\lambda)^\lambda}$.

Αφού τα επιτόκια είναι ισοδύναμα, θα πρέπει οι τελικές τους αξίες να είναι ίσες δηλαδή:

$$\mathbf{K(1 + i) = K\,(1 + i_\lambda)^\lambda} \quad \text{άρα} \quad \mathbf{1 + i = (1 + i_\lambda)^\lambda} \qquad \mathbf{(5)}$$

$$\mathbf{1 + i_\lambda = \sqrt[\lambda]{1 + i}} \quad \text{ή} \quad \mathbf{1 + i_\lambda = (1 + i)^{1/\lambda}}$$

άρα: $\mathbf{i_\lambda = \sqrt[\lambda]{1 + i} - 1}$ ή $\mathbf{i_\lambda = (1 + i)^{1/\lambda} - 1}$ **(6)**

Οι τιμές του $\mathbf{(1+ i)^{1/\lambda}}$ υπολογίζονται από τους οικονομικούς πίνακες ή με κομπιουτεράκι που μας δίνει την λ τάξεως ρίζα του 1+ i.

Παράδειγμα: Για ετήσιο επιτόκιο i= 18%:

- **το ισοδύναμο εξαμηνιαίο** θα είναι: $i_2 =(1+0,18)^{1/2} - 1 =1,086278 -1=0,086278 \cong 8,63\%$.

-**Το ισοδύναμο τριμηνιαίο** θα είναι: $i_4 = (1+ 0,18)^{1/4} - 1=1,0422466 -1 = 0,0422466 \cong 4,22\%$.

-**Το ισοδύναμο μηνιαίο** θα είναι $i_{12} = (1+0,18)^{1/12} - 1 = 1,0138884 - 1 = 0,0138884 \cong 1,39\ \%$

II) Αν γνωρίζουμε το επιτόκιο ενός μικρότερου χρονικού διαστήματος και θέλουμε να βρούμε το επιτόκιο ενός πολλαπλάσιου του χρονικού διαστήματος **κ·π,** χρησιμοποιούμε τον τύπο **(5),** τον οποίο λύνουμε ως προς **i**. Θα έχουμε:

$$\mathbf{1 + i = (1 + i_\lambda)^\lambda} \quad \text{ή} \quad \mathbf{i = (1 + i_\lambda)^\lambda - 1} \qquad \mathbf{(7)}$$

και γενικότερα:

$$\mathbf{i^{(\kappa)} = (1 + i)^\kappa - 1} \qquad \mathbf{(8)}$$

Στον τύπο (7) το $\mathbf{i^{(\kappa)}}$ πήγε στη θέση του **i** και συμβολίζει το επιτόκιο στο πολλαπλάσιο χρονικό διάστημα **κ·π**, το **i** πήγε στη θέση του $\mathbf{i_\lambda}$ και συμβολίζει το επιτόκιο στο αρχικό χρονικό διάστημα **π** και το **κ** πήγε στη θέση του **λ** και είναι ο αριθμός με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε το χρονικό διάστημα **π** για να πάρουμε το πολλαπλάσιο του **κ·π**.

Παράδειγμα : Αν έχουμε τριμηνιαίο επιτόκιο 4% τότε **το ισοδύναμο εξαμηνιαίο** θα είναι: $\mathbf{i^{(2)}} = (1 + 0,04)^2 - 1 = 1,0816 -1 = 0,0816 \cong 8,16\%$ και **το ισοδύναμο ετήσιο** θα είναι: $\mathbf{i^{(4)}} = (1+0,04)^4 -1 =1,16986 -1=0,16986 \cong 16,9\%$.

Γενίκευση του τύπου του ανατοκισμού

Αν ένα κεφάλαιο ανατοκίζεται για **n** χρονικές περιόδους και **μ/λ** μέρη της περιόδου **π**, τότε η τελική αξία μετά από **n +μ/λ** περιόδους **π,** θα υπολογισθεί με δύο τρόπους ανάλογα με το πως θα βρούμε τον τόκο στο χρονικό διάστημα **μ/λ** της περιόδου **π.**

α) Αν ο τόκος στο διάστημα μ· π/λ υπολογισθεί με ανατοκισμό, όπως και στις προηγούμενες ακέραιες περιόδους **π**, τότε θα έχουμε :

$$\mathbf{K_n = K_o(1 + i)^{n+ \mu/\lambda} = K_o(1+i)^n (1 +i)^{\mu/\lambda}} \qquad \mathbf{(10)}$$

Ο τύπος (10) λέγεται **εκθετικός τύπος του ανατοκισμού ή εκθετική συνθήκη.**

Αν η περίοδος **π** είναι ένα έτος, το χρονικό διάστημα **n** έτη και **μ** μήνες θα γραφτεί **n + μ/12** και η τελική αξία μετά από **n** έτη και **μ** μήνες θα είναι:

$$\mathbf{K_n = K_o (1 + i)^{n+ \mu/12} = K_o(1 +i)^n (1 +i)^{\mu/12}} \qquad \mathbf{(11)}$$

Αν η περίοδος **π** είναι ένα εξάμηνο τότε ο τύπος θα γίνει :

$$\mathbf{K_n = K_o (1 + i)^{n+ \mu/6} = K_o (1 +i)^n (1 +i)^{\mu/6}} \qquad \mathbf{(12)}$$

β) Αν ο τόκος στο διάστημα **μπ/λ** υπολογισθεί με τον τύπο του απλού τόκου (ενώ στις προηγούμενες ακέραιες περιόδους θα υπολογισθεί με ανατοκισμό), τότε η τελική αξία μετά από **n + μ/λ** περιόδους π θα γίνει:

$$K_n = K_n + K_n \frac{\mu}{\lambda} i = K_o (1+ i)^n + K_o (1 + i)^n \frac{\mu}{\lambda} i$$

$$\text{ή} \quad \mathbf{K_n = K_o(1 + i)^n (1 + \frac{\mu}{\lambda} i)} \qquad \mathbf{(13)}$$

Ο τύπος (12) λέγεται **μικτός τύπος του ανατοκισμού ή μικτή συνθήκη**.

Αν η ακέραια περίοδος είναι το έτος ο τύπος (13) θα γίνει :$\mathbf{K_n = K_o(1 + i)^n (1 + \frac{\mu}{12} i)}$

και αν είναι το εξάμηνο : $\mathbf{K_n = K_o(1 + i)^n (1 + \frac{\mu}{6} i)}$

Επίσης αν ο χρόνος εκφράζεται σε έτη (ή εξάμηνα) μήνες και ημέρες τότε οι μήνες μετατρέπονται σε μέρες και εφαρμόζεται ο τύπος με τη μορφή:

$$\mathbf{K_n = K_o(1 + i)^n (1 + \frac{\nu}{365} i)}$$

Παράδειγμα 10: Κεφάλαιο Κ = 300.000€ ανατοκίζεται κάθε χρόνο με i = 16%. Ποιά είναι η τελική του αξία μετά από 5 χρόνια και 4 μήνες ;

Λύση : α) με τον εκθετικό τύπο: Kn = Ko $(1 + i)^{5+ 4/12}$ = 300.000 x$1,16^5$ x$1,16^{4/12}$ = 300.000 x 2,1003418 x 1,0507176 = 662.059, 8285€. β) με το γραμμικό τύπο: Kn =300.000$(1+0,16)^5$ $(1+\frac{4}{12}$ x 0,16) = 300.000x$1,16^5$(1+0,0533) = 300.000x2,1003418 x 1,0533 = 663.687, 0051€.

Ασκήσεις

1. Το ετήσιο επιτόκιο τοκισμού ενός κεφαλαίου είναι 8%. Να υπολογισθεί το ισοδύναμο εξαμηνιαίο τετραμηνιαίο τριμηνιαίο και μηνιαίο.

***Λύση*:** Αν το ετήσιο επιτόκιο είναι 8%, τότε:

- Το ισοδύναμο εξαμηνιαίο είναι: $i_2 =(1+i)^{1/λ}-1 =(1+0{,}08)^{1/2} -1 =1{,}08^{6/12} -1=0{,}03923=3{,}92$ %.

- Το ισοδύναμο τετραμηνιαίο: $i_3 = (1 + 0{,}08)^{1/3} - 1 = (1{,}08)^{4/12} - 1 = 0{,}0259856 = 2{,}598$ %.

- Το ισοδύναμο τριμηνιαίο: $i_4 = (1+ 0{,}08)^{1/4} - 1 = 1{,}08^{3/12} - 1 = 0{,}0194265 = 1{,}94$ %

- Το ισοδύναμο μηνιαίο: $i_{12} = (1+ 0{,}08)^{1/12} - 1 = 0{,}006434 = 0{,}64$ %.

2. Να υπολογισθεί το εξαμηνιαίο πραγματικό επιτόκιο, το οποίο είναι ισοδύναμο προς το πραγματικό ετήσιο του 6%.

Λύση: Το εξαμηνιαίο (πραγματικό) επιτόκιο που είναι ισοδύναμο με ετήσιο (πραγματικό) 6% είναι: $i_2 = (1{,}06)^{1/2} - 1 = 1{,}06^{6/12} - 1 = 0{,}0295630 = 2{,}96$ %

3. Το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο είναι 10%. Να υπολογισθεί το εξαμηνιαίο ονομαστικό επιτόκιο και το ετήσιο πραγματικό επιτόκιο αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο.

Λύση : Ισχύει γενικά: ετήσιο ονομαστικό $\mathbf{j = λi_λ}$, και για το εξαμηνιαίο: $\mathbf{j = 2i_2}$ = 10% = 0,10.
Άρα i_2 = 0,10/2 = 0,05 = 5%.

Επίσης, αν ο ανατοκισμός είναι τριμηνιαίος ισχύει $\mathbf{j = 4i_4}$ = 0,10 . Άρα: $\mathbf{i_4}$ = 0,10/4 = 0,025.
Και: $i = (1+ 0{,}025)^4 - 1 = 1{,}10381289 -1 =0{,}10381289 = 10{,}38$ %.

4. Το ετήσιο επιτόκιο είναι 16%, να βρεθεί το ανάλογο τριμηνιαίο.

Λύση: Αν i = 16% = 0,16 το ανάλογο τριμηνιαίο είναι: 0,16/4 = 0,04 = 4 %.

5. Το τριμηνιαίο επιτόκιο είναι 2%. Ποιό είναι το ισοδύναμο ετήσιο επιτόκιο.

Λύση : Αν το τριμηνιαίο επιτόκιο είναι 2 % , δηλαδή $\mathbf{i_4}$ = 0,02, τότε από τη σχέση
$(1 + iλ)^λ = 1 + i$, θα έχουμε $(1 + 0{,}02)^4 = 1 + i$, και
$i = (1 + 0{,}02)^4 - 1 = 0{,}0824322 = 8{,}24$ %

6. Ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο και το τριμηνιαίο επιτόκιο είναι 6%. Να βρεθούν τα εξής επιτόκια: α)Το ισοδύναμο ετήσιο, το ισοδύναμο εξαμηνιαίο, το ισοδύναμο μηνιαίο. β)Το ανάλογο ετήσιο, το ανάλογο εξαμηνιαίο, το ανάλογο μηνιαίο.

Λύση : Αν το τριμηνιαίο επιτόκιο είναι 6 % τότε :

Το ισοδύναμο ετήσιο είναι : $i = (1 + i_4)^4 -1 = (1 + 0{,}06)^4 - 1 = 0{,}2624770 = 26{,}25\%$

Το ισοδύναμο εξαμηνιαίο είναι :$i = (1 + i_2)^2 - 1 = (1+ 0{,}06)^2 - 1 = 0{,}1236 = 12{,}36$ %

Το ισοδύναμο μηνιαίο είναι :$i_3 = (1+ 0{,}06)^{1/3} - 1 = (1{,}06)^{4/12} - 1 = 0{,}0196128 = 1{,}96$ %

Το ανάλογο ετήσιο είναι : 0,06 x 4 = 0,24 = 24 %

Το ανάλογο εξαμηνιαίο είναι :0,06 x 2 = 0,12 = 12 %

Το ανάλογο μηνιαίο είναι : 0,06 : 3 = 0,02 = 2 %

Προεξόφληση τίτλου με ανατοκισμό

Αν ένα γραμμάτιο ονομαστικής αξίας Κ προεξοφλείται με επιτόκιο προεξόφλησης **i** που αναφέρεται σε χρονική περίοδο **π** και η προεξόφληση γίνεται πριν από **n** τέτοιες χρονικές περιόδους π, το προεξόφλημα υπολογίζεται με ανατοκισμό.

Η παρούσα αξία Α του γραμματίου την ημέρα της προεξόφλησης θα είναι το ποσό που αν ανατοκισθεί για n χρονικές περιόδους με επιτόκιο i θα γίνει ίσο με K. Δηλαδή χρησιμοποιούμε μόνο εσωτερική προεξόφληση γιατί η εξωτερική μπορεί να μας οδηγήσει και σε τιμές του προεξοφλήματος μεγαλύτερες (!) της ονομαστικής αξίας.

Η παρούσα αξία θα υπολογισθεί ως εξής: Θα πρέπει : $K = A\,(1 + i)^{\mathbf{n}}$,

άρα:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{K}}{(1+\mathrm{i})\mathbf{n}} \qquad \textbf{ή} \qquad \mathbf{A = K\,(1 + i)^{-n}}$$

Το προεξόφλημα Ε θα υπολογισθεί ως εξής: $E = K - A \Leftrightarrow \mathbf{E = K - K(1 + i)^{-n}}$

Παράδειγμα 12 : Ένα κεφάλαιο 500.000€ λήγει μετά 3 έτη και προεξοφλείται με ετήσιο επιτόκιο 16%. Να βρείτε την παρούσα αξία και το προεξόφλημα.

Λύση : $A= K(1 + i)^{-n} = 500.000 \times 1{,}16^{-3} = 500.000 \times 0{,}6406577 = 320.328{,}85$€. Άρα το προεξόφλημα θα είναι: Ε = Κ - Α=500.000 - 320,328,85=179.671,15€.

Ασκήσεις στον Ανατοκισμό

1. Να βρεθεί η τελική αξία κεφαλαίου 180.000€, που ανατοκίζεται κάθε 6 μήνες για 10 έτη με ετήσιο επιτόκιο 8%. Αν στο τέλος των 5 πρώτων ετών προεξοφληθεί το κεφάλαιο που βρέθηκε, ποιά θα είναι η παρούσα αξία του και ποιό το προεξόφλημα;
Λύση: Αν θεωρήσουμε το 8% ετήσιο ανάλογο του εξαμηνιαίου, τότε το εξαμηνιαίο θα είναι:
$i/2 = 0{,}08/2 = 0{,}04$, n = 10 έτη = 20 εξάμηνα.

$K_n = K_o\,(1 + i/2)^{20} = 180.000 \times (1 + 0{,}04)^{20} = 180.000 \times 2{,}1912 = 394.416€.$

Αν το κεφάλαιο K_n προεξοφληθεί 5 έτη πριν τη λήξη του θα γίνει : $K = K_n\,(1 + 0{,}04)^{-10}$ διότι τα 5 έτη = 10 εξάμηνα. K = 394.416 x 0,6756 = 266.467,44 €. Άρα το προεξόφλημα , δηλαδή οι τόκοι των 5 τελευταίων ετών, θα είναι E = 394.416 - 266.467,44 = 127.948,56 €.

2. Να βρεθεί η τελική αξία 120.000€, που ανατοκίζονται για 8 έτη και 4 μήνες με 10%.
Λύση : K_o = 120.000€ , i = 10%= 0,10 , n = 8 έτη + 4 μήνες

$K_n = K_o(1+ i)^{n+\mu/12} = 120.000\,(1+0{,}10)^{8+4/12} = 120.000 \times 1{,}10^8 \times 1{,}10^{4/12} = 120.000 \times 2{,}1435887 \times 1{,}0322801 = 265.534{,}07€$.

3. Να βρείτε το ποσό που αν ανατοκισθεί ανά τρίμηνο θα γίνει μετά από 5 έτη και 2 μήνες 333.417,09 €, αν το τριμηνιαίο επιτόκιο είναι 6%.

Λύση: i = 0,06 , Kn = 333.417,09€, n =5 έτη+2 μήνες =20 τρίμηνα + 2/3 του τριμήνου. Ko = ;
$K_n = K_o\,(1 + i)^n$ άρα $K_o = K_n/(1+ i)^n = K_n\,(1 + i)^{-n}$. Άρα $K_o = 333.417{,}09\,(1 + 0{,}06)^{-(20 + 2/3)} = 333.417{,}09 \times 1{,}06^{-20} \times 1{,}06^{-2/3} = 333.417{,}09 \times 1{,}06^{-20} \times 1{,}06^{-1+1/3} = 333.417{,}09 \times 1{,}06^{-21} \times 1{,}06^{1/3} = 333.417{,}09 \times 1{,}06^{-21} \times 1{,}06^{4/12} = 333.417{,}09 \times 0{,}2941554 \times 1{,}0196128 = 100.000€$.

4. Ποιό κεφάλαιο πρέπει να καταθέσουμε με ανατοκισμό, ώστε μετά από 10 έτη να γίνει 3.000€, αν τα 5 πρώτα έτη ο ανατοκισμός είναι 6 μηνιαίος με εξαμηνιαίο επιτόκιο 8% και μετά γίνει ετήσιος με ετήσιο επιτόκιο 10% ;
Λύση : Τα πρώτα 5 έτη θα πάρουμε ένα κεφάλαιο $K_1 = K_o\,(1 + 0{,}08)^{10}$ διότι n = 10 εξάμηνα. Αυτό το κεφάλαιο θα ανατοκισθεί με ετήσιο ανατοκισμό τα 5 επόμενα έτη και θα γίνει $K_2 = K_1\,(1 + 0{,}10)^5$. Θα πρέπει K_2 = 3.000€. Άρα: $K_o\,(1+0{,}08)^{10}\,(1 + 0{,}10)^5 = 3.000€$ ή K_o = 3.000/ 2,158925 x 1,61051 = 862.820, 13€.

5. Κάποιος κατέθεσε σε μια τράπεζα 1.000€ για 8 έτη και 3 μήνες. Τα πρώτα 3 έτη με ανατοκισμό ετήσιο και ετήσιο επιτόκιο 12 %. Το υπόλοιπο χρονικό διάστημα ο ανατοκισμός ήταν εξαμηνιαίος με ονομαστικό επιτόκιο 20%. Να βρεθεί η τελική αξία του κεφαλαίου.

Λύση: $K_1 = 1.000 \times (1 + 0{,}12)^3 = 1.000 \times 1{,}404928 = 1.404{,}928$Το υπόλοιπο διάστημα το K_1 τοκίσθηκε με ονομαστικό επιτόκιο 20% . Άρα με $i_{\varepsilon\xi} = 0{,}20/2 = 0{,}10$ το κάθε εξάμηνο για χρονικό διάστημα 5 έτη και 3 μήνες δηλαδή 10 + 1/2 εξάμηνα. Άρα η τελική αξία θα είναι:
$Kn = K_1(1+0{,}10)^{10+1/2} = K_1 \times 1{,}1^{10} \times 1{,}1^{1/2} = 1.404{,}928 \times 2{,}5937423 \times 1{,}0488088 = 3.821{,}8813€$.

6. Να βρεθεί το κεφάλαιο το οποίο όταν ανατοκίζεται κάθε τετράμηνο με ετήσιο επιτόκιο 12%, γίνεται σε 5 χρόνια 180.094€. (απ. 100.000€)

7. Να βρεθεί το κεφάλαιο, το οποίο όταν ανατοκίζεται κάθε χρόνο με ετήσιο επιτόκιο 20 % δίνει στο τέλος του τέταρτου έτους τόκο 611.952€. Δίνεται $(1+0,20)^4 = 2,0736$. (απ. 570.000€)

8. Μια βιοτεχνία δανείσθηκε ένα ποσό Α με ετήσιο επιτόκιο 12% και μετά 2 χρόνια δανείσθηκε με τους ίδιους όρους ποσό Β διπλάσιο από το πρώτο. Ισχύει ετήσιος ανατοκισμός και η βιοτεχνία εξόφλησε τα δάνεια 5 χρόνια μετά τη σύναψη του δεύτερου δανείου πληρώνοντας 573.536,48€. Να βρεθούν τα ποσά Α και Β.(απ. Α = 100.000€ , Β = 200.000€)

9. Οφείλει κάποιος να πληρώσει μετά από 5 χρόνια 30.000€. Συμφωνεί όμως να πληρώσει σε 2 χρόνια από σήμερα 5000€ , 6 μήνες αργότερα 8.000€ και να εξοφλήσει το χρέος του ένα χρόνο νωρίτερα. Τι ποσό πρέπει να πληρώσει για την εξόφληση του χρέους; Ανατοκισμός ετήσιος και ετήσιο επιτόκιο 12%. (Απ. 11.031,35€)

10. Κάποιος κατέθεσε ένα ποσό με ετήσιο επιτόκιο 8% και εξαμηνιαίο ανατοκισμό για 3 έτη και 8 μήνες. Μετά ο ανατοκισμός έγινε τριμηνιαίος. Να βρεθεί το ποσό που κατέθεσε, αν γνωρίζουμε ότι 6 έτη μετά από την αρχική κατάθεση υπήρχαν στο λογαριασμό του24.054,14€.

11. Κάποιος κατέθεσε σήμερα σε μια τράπεζα 10.000€, με ετήσιο επιτόκιο 8% και εξαμηνιαίο ανατοκισμό. Ζητούνται: α) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό του μετά από 5 έτη και 8 μήνες; β) Τι ποσό θα υπάρχει μετά από το ίδιο αυτό χρονικό διάστημα, αν αφού περάσουν 2 έτη, τα χρήματα αρχίσουν να ανατοκίζονται κάθε τρίμηνο, με το ίδιο ετήσιο επιτόκιο;
γ) Βρείτε το ισοδύναμο ετήσιο του τριμηνιαίου 4%, καθώς και το ισοδύναμο εξαμηνιαίο του ετήσιου 20%.

12. Κάποιος κατέθεσε σήμερα σε μια τράπεζα 10.000€, με ετήσιο επιτόκιο 12%. α) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό του μετά από 3 έτη και 9 μήνες, αν τα χρήματα ανατοκίζονται κάθε εξάμηνο; β) Τι ποσό θα υπάρχει μετά από άλλα 3 έτη και 2 μήνες, αν κατά το δεύτερο αυτό διάστημα ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο, με το ίδιο ετήσιο επιτόκιο; γ) Τι ποσό θα έπρεπε να είχε καταθέσει με ετήσιο ανατοκισμό και με το ίδιο ετήσιο επιτόκιο για να πάρει τελική αξία 15.000€, μετά από το συνολικό παραπάνω χρονικό διάστημα ;

13. Κάποιος κατέθεσε σήμερα σε μια τράπεζα ένα ποσό με ετήσιο σταθερό επιτόκιο 8% και ετήσιο ανατοκισμό. Ζητούνται: α) Να βρεθεί το ποσό αυτό, αν γνωρίζετε ότι μετά από 4 έτη και 6 μήνες θα γίνει 10.000 €. β) Πόσο θα γίνει το κεφάλαιο, που βρήκατε, αν τοκισθεί με τριμηνιαίο ανατοκισμό, για το ίδιο χρονικό διάστημα, με το ίδιο ετήσιο επιτόκιο;

14. Μια επιχείρηση δανείσθηκε κεφάλαιο Κ για 7 χρόνια με συμφωνία ο ανατοκισμός να είναι ετήσιος τα 3 πρώτα χρόνια με ετήσιο επιτόκιο 16% και τα υπόλοιπα με ετήσιο επιτόκιο 18%. Να βρεθεί το Κ αν η επιχείρηση πλήρωσε μετά από τα 7 χρόνια 4.236.723€. (απ. 1.400.000€).

ΙΣΕΣ ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ-ΙΣΕΣ ΠΛΗΡΩΜΕΣ (ΡΑΝΤΕΣ)

Ράντα (ή *Reddita ή Rente ή Rent),* **λέγεται μια σειρά ίσων κεφαλαίων που τα καταθέτουμε σε ίσα χρονικά διαστήματα για να αποκτήσουμε ένα κεφάλαιο ή για να εξοφλήσουμε ένα χρέος.**

Τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας

Η τελική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας με όρο **R** θα είναι:

$$\mathbf{V_{\tau\varepsilon\lambda} = R\, S_{n\urcorner\, i}} \quad \text{ή} \quad \mathbf{V_{\tau\varepsilon\lambda}} = \frac{\mathbf{R[(1+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}} - 1]}}{\mathbf{i}} \qquad \mathbf{(1)}$$

Τελική αξία προκαταβλητέας ράντας

Η τελική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας με όρο **R** θα είναι:

$$\mathbf{V'_{\tau\varepsilon\lambda} = \boldsymbol{R}\,(1 + i)\, S_{n\urcorner\, i}} \quad \text{ή} \quad \mathbf{V'_{\tau\varepsilon\lambda} = \boldsymbol{R}\,(1 + i)}\, \frac{\mathbf{[(1+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}} - 1]}}{\mathbf{i}} \qquad \mathbf{(2)}$$

όπου $\mathbf{S_{n\urcorner\, i}} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ είναι ο συντελεστής τελικής αξίας ράντας.

Αρχική (ή παρούσα) αξία ληξιπρόθεσμης ράντας

Η αρχική ή παρούσα αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας με όρο ***R*** θα είναι :

$$\mathbf{V_{\alpha\rho\chi} = \boldsymbol{R}\, \alpha_{n\urcorner\, i}} \quad \text{ή} \quad \mathbf{V_{\alpha\rho\chi} = \boldsymbol{R}}\, \frac{\mathbf{[1-(1+\boldsymbol{i})^{-\boldsymbol{n}}]}}{\mathbf{i}}$$

Αρχική (ή παρούσα) αξία προκαταβλητέας ράντας.

Η αρχική ή παρούσα αξία μιας προκαταβλητέας ράντας με όρο **R** θα είναι :

$$\mathbf{V'_{\alpha\rho\chi} = R\,(1 + i)\, \alpha_{n\urcorner\, i}} \quad \text{ή} \quad \mathbf{V'_{\alpha\rho\chi} = R\,(1 + i)}\, \frac{\mathbf{[1-(1+\boldsymbol{i})^{-\boldsymbol{n}}]}}{\mathbf{i}}$$

όπου $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{n\urcorner\, i}} = \frac{\mathbf{[1-(1+\boldsymbol{i})^{-\boldsymbol{n}}]}}{\mathbf{i}}$ είναι ο συντελεστής παρούσας αξίας ράντας.

Τακτοποίηση ράντας

Πολλές φορές, όταν ζητάμε το πλήθος n των όρων της ράντας και δεν βγαίνει ακέραιος αριθμός με τη μέθοδο που περιγράψαμε προηγουμένως, μπορούμε να τροποποιήσουμε τον όρο R ,ώστε να αποκτήσει η ράντα ακέραιο αριθμό όρων, την πλησιέστερη ακέραια τιμή του n , μικρότερη ή μεγαλύτερη, από τον αριθμό που βρήκαμε. Η τροποποίηση αυτή, λέγεται **τακτοποιήση ράντας** και γίνεται όπως φαίνεται παρακάτω:

Εφαρμογή : Για να εξοφλήσουμε ένα δάνειο 20.000 Ευρώ με επιτόκιο 18%, συμφωνήσαμε να πληρώνουμε κάθε χρόνο 4250 Ευρώ και η πρώτη δόση να πληρωθεί ένα (1) έτος μετά τη σύναψη του δανείου. Σε πόσα χρόνια θα εξοφλήσουμε το δάνειο;

Λύση : Οι δόσεις του δανείου αποτελούν άμεση ληξιπρόθεσμη ράντα με R = 4250, i = 18% και V αρχ = 20.000€.

Από τον τύπο $V_{αρχ} = R\, α_{n┐i}$ θα έχουμε : $α_{n┐i} = \frac{Vαρχ}{R} = \frac{20.000}{4250} = 4{,}7058823$

Ο αριθμός αυτός δεν υπάρχει στον οικονομικό πίνακα στη στήλη του 18%, αλλά βρίσκεται ανάμεσα στους 4,656005 και 4,793224 που αντιστοιχούν στις γραμμές n = 11 και n= 12. Άρα θα γίνει τακτοποίηση της ράντας, με έναν από τους παρακάτω τρόπους :

α) Θα αυξήσουμε τον όρο R και θα πάρουμε ράντα με n = 11 όρους. Ο νέος όρος θα είναι:

$R = \frac{V\,αρχ}{α\, n┐i} = \frac{20.000}{4{,}656005} = 429.552{,}8€.$

β) θα ελαττώσουμε τον όρο R και θα πάρουμε ράντα με n = 12 όρους. Ο νέος όρος θα είναι

$R = V\,αρχ / α\ 12┐ 0{,}18 = 20.000 / 4{,}793224 = 417.255{,}9€.$

γ) θα πάρουμε ράντα με n = 11όρους ίσους με R και έναν επιπλέον όρο, που θα πληρωθεί μια περίοδο μετά απο τον 11ο όρο και θα είναι ίσος με τη διαφορά της δοθείσας V αρχ μείον την αρχική αξία ράντας με 11 όρους, αν θεωρήσουμε ότι η διαφορά αυτή ανατοκίζεται επί 12 έτη. Ο επιπλέον όρος θα είναι:

$R' = [\ 20.000 - 4250\ α\ 11┐ 0{,}18\ \ (1 + 0{,}18)^{12} = 1544{,}8165\ €.$

Μέλλουσες ράντες

Στις μέλλουσες ράντες, η αρχή βρίσκεται λ περιόδους μετά από την εποχή υπολογισμού. Για να βρούμε την **αρχική αξία (παρούσα αξία)** της μέλλουσας ράντας, βρίσκουμε την αρχική αξία της άμεσης ράντας (με τα ίδια στοιχεία) και την προεξοφλούμε για λ περιόδους πριν την αρχή της . Οπότε θα έχουμε τους τύπους:

Για ληξιπρόθεσμη μέλλουσα η παρούσα αξία θα είναι:

$$V_\lambda = R\, \alpha_{n\rceil i}\ (1+i)^{-\lambda} \qquad (10)$$

Για προκαταβλητέα μέλλουσα η παρούσα αξία θα είναι:

$V_\lambda = R\,(1+i)\, \alpha_{n\rceil i}\ (1+i)^{-\lambda} = R\, \alpha_{n\rceil i}\ (1+i)(1+i)^{-\lambda}$ ή

$$V'_\lambda = R\, \alpha_{n\rceil i} (1+i)^{-\lambda+1} \qquad (11)$$

Εφαρμογή 1 : Ένας πατέρας κατέθεσε όταν γεννήθηκε το παιδί του ένα ποσό στην τράπεζα, ώστε όταν το παιδί του γίνει 15 ετών να αρχίσει να παίρνει 12.000 το χρόνο για μια δεκαετία για τα έξοδα των σπουδών του. Τι ποσό κατέθεσε αν το επιτόκιο ήταν 17% ;
Λύση : Ο πατέρας κατέθεσε ένα ποσό ίσο με την παρούσα αξία μιας μέλλουσας ράντας, που ο πρώτος όρος της θα καταβληθεί στο τέλος του 15ου έτους. Δηλαδή :

$V_\lambda = R\, \alpha_{10\rceil 17} (1 + 0{,}17)^{-14} = 12.000 \times 4{,}658604 \times 0{,}1110191 = 620632{,}82$ €.

Εφαρμογή 2 : Ένας υπάλληλος κατέθεσε ένα ποσό σε μια τράπεζα, ώστε όταν πάρει τη σύνταξή του, να εισπράττει 9.600 Ευρώ το χρόνο για 10 χρόνια. Τι ποσό κατέθεσε αν τα χρήματά του ανατοκίζονται με 17% το χρόνο και ο υπάλληλος θα πάρει σύνταξη 6 χρόνια μετά την κατάθεση των χρημάτων;
Λύση : Το ποσό που κατέθεσε είναι η παρούσα αξία μέλλουσας προκαταβλητέας ράντας.
$V_\lambda = R\, \alpha_{n\rceil i}\ (1+ i)^{-\lambda+1} = 9.600 \times 4{,}658604 \times 1{,}17^{-5} = 2.039.846{,}8$ € .

Αρξάμενες ράντες

Στις αρξάμενες ράντες, η αρχή βρίσκεται λ περιόδους πριν απο την εποχή υπολογισμού. Για να βρούμε την παρούσα αξία της αρξάμενης ράντας θα ανατοκίσουμε την αρχική αξία της άμεσης ράντας με τα ίδια στοιχεία, για λ περιόδους. Δηλαδή:

Για ληξιπρόθεσμη αρξάμενη

$$V_\lambda = R\, \alpha_{n\rceil i} (1+i)^{\lambda} \qquad (12)$$

Για προκαταβλητέα αρξάμενη

$V'_\lambda = R(1+i)\, \alpha_{n\rceil i} (1+i)^{\lambda}$ ή $V'_\lambda = R\alpha_{n\rceil i} (1+i)(1+i)^{\lambda}$ ή

$$V'_\lambda = R\, \alpha_{n\rceil i} (1+i)^{\lambda+1} \qquad (13)$$

Εφαρμογή 1: Να βρείτε την αρχική αξία ράντας ληξιπρόθεσμης που αποτελείται από 20 όρους όταν ο κάθε όρος είναι 2.000 Ευρώ, η περίοδος ένα έτος, το επιτόκιο 12% και ο πρώτος όρος πληρώθηκε πριν από πέντε χρόνια.

Λύση: $V_{\lambda} = R\, \alpha_{15 \rceil 0,12} (1+ 0,12)^5 = 2.000 \times 6,81087 \times 1,76234 = 24.006,137$€.

Εφαρμογή 2: Να βρείτε την αρχική αξία ράντας προκαταβλητέας, που αποτελείται από 20 όρους των 2.000 Ευρώ, επιτόκιο 12% και που άρχισε πριν από 5 χρόνια.

Λύση : $V'_{\lambda} = R\, \alpha_{20 \rceil 0,12} (1+ i)^6 = 2.000 \times 7,46944 \times 1,97382 = 29.486,66$€ .

Διηνεκείς ράντες

Διηνεκείς λέγονται οι ράντες με άπειρο πλήθος όρων. Για να βρούμε την αρχική αξία μιας διηνεκούς ράντας θα αθροίσουμε τις αρχικές αξίες των όρων της. Για τη **μοναδιαία ληξιπρόθεσμη ράντα** με ετήσιο επιτόκιο i, θα έχουμε:

$$\alpha = (1+ i^{-1} + (1+ i)^{-2} + \ldots + (1+ i)^{-n} + \ldots$$

Το δεύτερο μέλος είναι το άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου με

πρώτο όρο $(1 + i)^{-1}$ και λόγο $(1+ i^{-1}$.

Χρησιμοποιούμε τον τύπο $S_{\infty} = \dfrac{\alpha_1}{1-\lambda}$

Άρα $$\alpha_{n\rceil\, i} = \frac{(1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{1}{i} \qquad \textbf{(14)}$$

Και αν έχουμε όρο R, τότε ισχύει ο παρακάτω τύπος :

Παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης διηνεκούς:

$$\mathbf{V} = \frac{R}{i} \qquad \textbf{(15)}$$

Παρούσα αξία προκαταβλητέας διηνεκούς όρου R:

$$\mathbf{V'} = \frac{R(1+i)}{i} \qquad \textbf{(16)}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΡΑΝΤΕΣ

1. Τι ποσό θα εισπράξουμε μετά από 20 έτη , αν καταθέτουμε στο τέλος κάθε έτους 10.000€, όταν για τα πρώτα 10 έτη το επιτόκιο είναι 8% και μετά γίνει 6%;

Λύση: Θα βρούμε την τελική αξία των 10 πρώτων δόσεων, οι οποίες αποτελούν ετήσια ληξιπρόθεσμη ράντα με ετήσιο επιτόκιο 8%.

$\mathbf{V_{τελ1} = R\, S_{n\urcorner\, i}}$ = $R\, S_{10\urcorner\, 0,08}$ = 10.000 x 14,486562 = 144.865,62€.

Το ποσό αυτό είναι το κεφάλαιο που θα υπάρχει στο λογαριασμό μας στο τέλος του $10^{ου}$ έτους. Το κεφάλαιο αυτό, αφού δεν αποσύρθηκε, θα ανατοκίζεται κάθε έτος, για τα υπόλοιπα 10 έτη, με το νέο επιτόκιο 6% και στο τέλος του $20^{ου}$ έτους θα έχει τελική αξία: $\mathbf{K_n = K_0(1+i)^n}$ = $V_{τελ1}(1+0,06)^{10}$ = 144.865,62 x1,79085 =259.432,5956€.

Οι υπόλοιπες δόσεις, που θα συνεχίσουν να καταβάλλονται για άλλα 10 έτη με επιτόκιο 6 %, θα αποτελέσουν άλλη ράντα:

$\mathbf{V_{τελ2} = R\, S_{n\urcorner\, i}}$ =10.000 $S_{10\urcorner\, 0,06}$ = 10.000 x 13,1808 =131.808€. Άρα μετά από 20 έτη θα εισπράξουμε: $\mathbf{V_{τελ1}(1+0,06)^{10} + V_{τελ2}}$ =259.432,5956 + 131.808 = 391.240,5956€.

2. Ένας ιδιώτης έχει συμφωνήσει να πληρώνει 10.000€ στο τέλος κάθε χρόνου για 20 χρόνια. Ποιά δόση πρέπει να πληρώνει αν αποφασίσει να αλλάξει τη συμφωνία και να εξοφλήσει το ποσό που χρωστάει σε 10 χρόνια; (i = 10%)

Λύση: Τόσο η παλιά(για διάρκεια n = 20 έτη) όσο και η νέα συμφωνία (για διάρκεια n = 10 έτη) αποτελούν δύο ληξιπρόθεσμες ράντες, οι οποίες θα πρέπει να έχουν την ίδια παρούσα αξία που είναι το αρχικό χρέος. Άρα αν R' είναι η ζητούμενη δόση της δεύτερης ράντας θα πρέπει:

$\mathbf{R\, α_{n\urcorner\, i} = R'\, α_{n'\urcorner\, i} = V_{αρχ}}$, δηλαδή: $R\, α_{20\urcorner\, 0,10} = R'\, α_{10\urcorner\, 0,10}$ ή

10.000 x 8,513564 = R' · 6,144567 ή 85135,64 = R' · 6,144567 ή

R' = 85135,64 : 6,144567 = 13855,4336€.

3. Ένας υπάλληλος άρχισε να καταθέτει πριν από 5 έτη (*τα έτη υπολογίζονται από την αρχή της πενταετίας*) σε μια τράπεζα ποσό 10.000€ με επιτόκιο 8% και σκοπεύει να συνεχίσει να καταθέτει κάθε χρόνο την ίδια μέρα το ίδιο ποσό για άλλα 10 έτη. Τι ποσό υπάρχει στο λογαριασμό του σήμερα α) αν οι καταθέσεις γίνονται στο τέλος κάθε έτους β) αν γίνονται στην αρχή.

4. Να βρεθεί η τελική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας , που έχει 12 όρους ίσους με 10.000€, αν γνωρίζετε ότι την ημέρα της κατάθεσης του 5ου όρου , το επιτόκιο αυξήθηκε από 5% σε 8%.

5. Αγόρασε κάποιος ένα οικόπεδο αξίας 50.000€ ως εξής: Έδωσε 5.000€ ως προκαταβολή και συμφώνησε να πληρώσει τα υπόλοιπα σε 10 ισόποσες ετήσιες δόσεις με ετήσιο επιτόκιο 12% . Αν οι δόσεις καταβάλλονται στο τέλος κάθε έτους να βρείτε:

α) Τι δόση θα πληρώνει ο αγοραστής κάθε έτος. β) Τι ποσό θα πληρώσει, αν θελήσει να εξοφλήσει το χρέος του με την πληρωμή της πέμπτης δόσης.

6. Κάποιος κέρδισε στο λαχείο 160.000€ και τα κατέθεσε αμέσως με ετήσιο επιτόκιο 6%. Τέσσερα χρόνια μετά, αγόρασε ένα διαμέρισμα με τη συμφωνία να το εξοφλήσει σε 10 ετήσιες δόσεις των 35.000€ που θα πληρώνονται στο τέλος κάθε έτους και θα ανατοκίζονται με ετήσιο επιτόκιο 12%. Μπορεί να εξοφλήσει το οικόπεδο μόνο με τα χρήματα που έχει στην τράπεζα;

7. Δανείστηκε κάποιος 80.000€ με επιτόκιο 12% και με την υπόσχεση να τα εξοφλήσει σε ετήσιες δόσεις των 14.000€, που θα πληρώνονται στο τέλος κάθε έτους. Σε πόσα χρόνια θα εξοφλήσει το δάνειο;

(Υπόδειξη: Να γίνει τακτοποίηση της ράντας με όλους τους δυνατούς τρόπους).

8. Σε μια άμεση διηνεκή προκαταβλητέα ράντα, η αρχική αξία της είναι εξαπλάσια του όρου της. Να βρεθεί το επιτόκιο της.

9. Μια βιομηχανία προμηθεύτηκε πρώτες ύλες αξίας 80.000€ και συμφώνησε να πληρώσει την αξία τους σε 10 ισόποσες ετήσιες δόσεις με επιτόκιο 10% κατ' έτος. Αν η πρώτη δόση πληρωθεί την ημέρα της συμφωνίας, να βρεθεί :

α) Το ποσό της κάθε δόσης

β) Το ποσό που θα πληρώσει η βιομηχανία , αν θελήσει να εξοφλήσει το χρέος της με την πληρωμή της πέμπτης δόσης.

ΜΑΚΡΟΠΡΟΘΕΣΜΑ ΔΑΝΕΙΑ

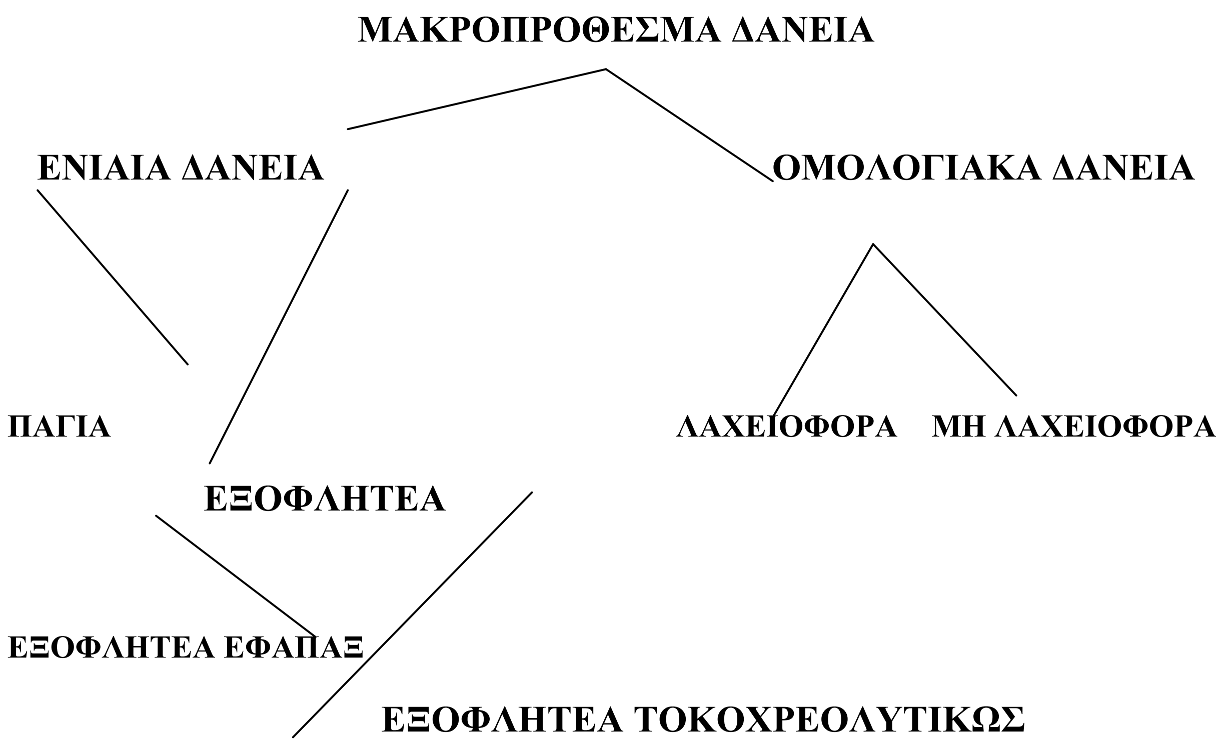
Δάνειο λέγεται ένα κεφάλαιο που δίνεται για ένα χρονικό διάστημα σε φυσικά ή σε νομικά πρόσωπα με ορισμένους όρους, οι οποίοι καθορίζονται από πριν, με κοινή συμφωνία των δύο συμβαλλομένων μερών.

Διάρκεια του δανείου λέγεται το χρονικό διάστημα από την ημέρα που δόθηκε το δάνειο μέχρι την ημέρα που θα επιστραφεί.

Εξόφληση ενός δανείου είναι η επιστροφή των χρημάτων που δανείστηκαν μαζί με τους τόκους που έχουν παραχθεί κατά την διάρκειά του.

Απόσβεση του δανείου λέγεται η διαδικασία που ακολουθείται κατά τη διάρκεια του δανείου με σκοπό την εξόφληση του. Οι διάφοροι τρόποι απόσβεσης λέγονται και **συστήματα απόσβεσης δανείων.**

Τα μακροπρόθεσμα δάνεια χωρίζονται σχηματικά ως εξής :



Η εξόφληση ενός δανείου μπορεί να γίνει είτε με την πληρωμή ολόκληρου του ποσού μια φορά στο τέλος της διάρκειας του (στην λήξη του) οπότε το δάνειο αυτό ανήκει στην κατηγορία " **Δάνεια εξοφλητέα εφάπαξ** " είτε σιγά-σιγά, με δόσεις οπότε ανήκει στην κατηγορία : "**Δάνεια εξοφλητέα τοκοχρεολυτικώς". Πολλές φορές επίσης ο οφειλέτης, προκειμένου να διευκολυνθεί στη συγκέντρωση του ποσού του δανείου καταθέτει, συνήθως σε ίσες χρονικές περιόδους κάποια ποσά με σκοπό να σχηματίσουν αυτά τα ποσά μέχρι τη λήξη του δανείου (με ανατοκισμό), το ποσό που πρέπει να πληρώσει. Τότε λέμε ότι ο οφειλέτης **σχηματίζει εξοφλητικό απόθεμα.**

Μεσοπρόθεσμα δάνεια. Σύστημα απόσβεσης ίσων μερών κεφαλαίου.

Είναι ένα απλό σύστημα, που εφαρμόζεται για δάνεια μικρής διάρκειας. Η απόσβεση με τη μέθοδο αυτή γίνεται ως εξής: Το κεφάλαιο του δανείου διαιρείται σε τόσα ίσα μέρη, όσες είναι και οι χρονικές περίοδοι απόσβεσης του δανείου.

Ο οφειλέτης πληρώνει στο τέλος κάθε μιας χρονικής περιόδου ένα από αυτά τα ίσα μέρη, το οποίο αφαιρείται από το χρέος του. Δηλαδή το **χρεολύσιο** (P) θα είναι το 1/n του κεφαλαίου του δανείου:

$\mathbf{P = K_o / n}$

Οι τόκοι υπολογίζονται στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου σύμφωνα με τον τύπο του απλού τόκου, επί του κεφαλαίου που έχει απομείνει κάθε φορά(επί του υπολοίπου): $\mathbf{I = K_o\, n\, i}$ **,** για **n=1.** Άρα:

$\mathbf{I = K_o\, i}$

Παράδειγμα 1: Κάποιος δανείσθηκε 6.000€ και συμφώνησε να κάνει απόσβεση του δανείου με τη μέθοδο ίσων μερών κεφαλαίου. Η διάρκεια του δανείου είναι 6 έτη, οι δόσεις θα πληρώνονται στο τέλος κάθε έτους και το ετήσιο επιτόκιο δανεισμού είναι 14 % . Να συντάξετε τον πίνακα απόσβεσης του δανείου.

Λύση: Το χρεολύσιο θα είναι P = K/n = 6.000/6 = 1.000€.

Ο τόκος στο τέλος του 1^ου^ έτους θα είναι: $K_o\, i$ = 6000x0,14 = 840€. Τα επόμενα έτη ο τόκος θα υπολογίζεται επί του υπολοίπου.
Άρα θα έχουμε τον παρακάτω πίνακα απόσβεσης:

Έτος	Τόκος	Χρεολύσιο	Τοκοχρεολύσιο	Εξοφλημένο ποσό	Υπόλοιπο
1ο	840	1.000	1.840	1.000	5.000
2ο	700	1.000	1.700	2.000	4.000
3ο	560	1.000	1.560	3.000	3.000
4ο	420	1.000	1.420	4.000	2.000
5ο	280	1.000	1.280	5.000	1.000
6^o	140	1.000	1.140	6.000	0

Δάνεια ενιαία εξοφλητέα τοκοχρεολυτικώς

Για να εξοφληθεί ένα ενιαίο δάνειο τοκοχρεολυτικώς, ο οφειλέτης πληρώνει στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου ένα ποσό, που λέγεται **δόση του δανείου** ή **τοκοχρεολύσιο** του δανείου και αποτελείται από δύο μέρη. Το ένα είναι για την πληρωμή των τόκων της περιόδου (**τόκος**) και το άλλο είναι για την εξόφληση του κεφαλαίου του δανείου (**χρεολύσιο).** Τόσο ο τόκος, όσο και το χρεολύσιο που καταβάλλονται, υπολογίζονται με τη μέθοδο της χρεολυσίας.

Χρεολυσία ονομάζουμε τη διαδικασία εξόφλησης ενός μακροπρόθεσμου δανείου με δόσεις, κατά την οποία συνυπολογίζονται και οι τόκοι των δόσεων που καταβάλλονται για την εξόφληση του δανείου.

Πιο συγκεκριμένα οι τόκοι $\mathbf{K_o i}$ που καταβάλλονται στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου ανατοκίζονται, οπότε η τελική τους αξία μετά από **n** χρονικές περιόδους είναι η τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας **n** όρων ίσων με K_o i, δηλαδή είναι: $\mathbf{K_o\, i\, S\, n\urcorner\, i}$.

Το ίδιο ισχύει και για το χρεολύσιο.

Με αυτό το σκεπτικό **η τοκοχρεωλυτική δόση R που καταβάλλεται στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου θα πρέπει να αποτελεί ληξιπρόθεσμη ράντα, η οποία όταν θα γίνει η πλήρης εξόφληση του δανείου θα έχει τελική αξία ίση με το αρχικό κεφάλαιο του δανείου συν την τελική αξία των τόκων κάθε περιόδου (*Βασική αρχή της χρεολυσίας).***

Αν η χρονική περίοδος είναι ένα έτος τότε η βασική αρχή της χρεολυσίας εκφράζεται από την παρακάτω εξίσωση (***Βασική εξίσωση της χρεολυσίας***):

$$\mathbf{RS\, n\urcorner\, i = K_o\, i\, S\, n\urcorner\, i + K_o} \qquad \mathbf{(1)}$$

Αν λύσουμε την (1) ως προς **R** θα έχουμε:

$$\mathbf{R = K_o\, i + K_o \frac{1}{S\, n\urcorner\, i}} \qquad \mathbf{(2)}$$

Ο αριθμός $\mathbf{1/\, S\, n\urcorner\, i}$ είναι το χρεολύσιο μιας νομισματικής μονάδας και λέγεται **συντελεστής χρεολυσίου.** Στη βιβλιογραφία παριστάνεται με το σύμβολο $\mathbf{P\, n\urcorner\, i}$.

Με αυτό το συμβολισμό η σχέση (2) μπορεί να γραφτεί:

$$\mathbf{R = K_o\, i + K_o P\, n\urcorner\, i} \qquad \mathbf{(2')}$$

Ο τύπος (2) ή ισοδύναμα ο (2΄) μας δίνουν το **ετήσιο τοκοχρεολύσιο**.

Οι τιμές του $\mathbf{P\, n\urcorner\, i = 1/\, S\, n\urcorner\, i}$ δίνονται από οικονομικούς πίνακες.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι (συστήματα) απόσβεσης ενιαίων δανείων τοκοχρεολυτικώς. Εδώ θα εξετάσουμε τους σπουδαιότερους:

1. Σύστημα απόσβεσης σταθερού χρεολυσίου.

Σύμφωνα με το σύστημα αυτό και βάσει του τύπου (2) ή (2΄), που δίνει την τοκοχρεολυτική δόση, ο οφειλέτης πληρώνει στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου τον τόκο **Ko i**, ο οποίος παραμένει σταθερός μέχρι την πλήρη εξόφληση του δανείου. Επίσης πληρώνει το χρεολύσιο της χρονικής περιόδου **Ko P n┐i** που επίσης παραμένει σταθερό. Άρα και το άθροισμα **R** των δύο αυτών ποσών, που είναι το τοκοχρεολύσιο της περιόδου παραμένει σταθερό.

Οι τόκοι των χρεολυσίων προστίθενται στο εξοφλημένο ποσό, δηλαδή συνυπολογίζονται στην εξόφληση του δανείου.

Με τα δεδομένα αυτά συντάσσεται ο πίνακας απόσβεσης του δανείου.

Παράδειγμα 2: Ένας δήμος πήρε δάνειο 100.000€ για 5 έτη με ετήσιο επιτόκιο 12 %. Το δάνειο θα εξοφληθεί με ίσες ετήσιες τοκοχρεολυτικές δόσεις. Να βρεθεί το ετήσιο τοκοχρεολύσιο και να συνταχθεί ο πίνακας απόσβεσης του δανείου με τη μέθοδο του σταθερού χρεολυσίου.

Λύση: Το ετήσιο τοκοχρεολύσιο θα είναι : R = Ko i + Ko P n┐i =

= 100.000 x 0,12 + 100.000 x 0,15740970 =

= 12.000 + 15.740,970 = 27.740,970

(τόκος) (χρεολύσιο)

Πίνακας απόσβεσης δανείου

Έτος	Τόκος	Χρεολύσιο	Τοκοχρεολύσιο	Εξοφλημένο ποσό	Υπόλοιπο
1ο	12.000	15.740,970	27.740,970	15.740.970	84.259,030
2ο	12.000	15.740,970	27.740,970	33.370,859	66.629,141
3ο	12.000	15.740,970	27.740,970	53.116,332	46.883,668
4ο	12.000	15.740,970	27.740,970	75.231,261	24.768,739
5ο	12.000	15.740,940	27.740,940	99.999,982	0

Διευκρινίσεις : Ο τόκος, το χρεολύσιο, άρα και το τοκοχρεολύσιο παραμένουν σταθερά σ' αυτή τη μέθοδο. Για να βρούμε το εξοφλημένο ποσό εργαζόμαστε ως εξής:

Στο τέλος του πρώτου έτους το εξοφλημένο ποσό είναι το χρεολύσιο.

Για κάθε επόμενο έτος πολλαπλασιάζουμε το εξοφλημένο ποσό του προηγούμενου έτους επί (1 + i) (ετήσιος συντελεστής ανατοκισμού) επειδή ανατοκίζεται για ένα ακόμη έτος και προσθέτουμε το χρεολύσιο. Συνεχίζουμε έτσι μέχρις ότου γίνει πλήρης απόσβεση του δανείου.

2. Σύστημα απόσβεσης με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου (Γαλλική μέθοδος)

Σύμφωνα με το σύστημα αυτό χρησιμοποιούμε αρχικά πάλι τον τύπο (2) ή (2΄), που δίνει την ετήσια τοκοχρεολυτική δόση:

$$R = K_o\, i + K_o\, P_{n\urcorner i} \qquad (2΄)$$

Όμως ο τόκος κάθε χρονικής περιόδου, μετά από την πρώτη, υπολογίζεται πάνω στο ανεξόφλητο ποσό, δηλαδή στο υπόλοιπο του δανείου. Και επειδή το υπόλοιπο συνεχώς μειώνεται κατά το χρεολύσιο της προηγούμενης περιόδου, μειώνεται και ο τόκος. Όμως το τοκοχρεολύσιο παραμένει σταθερό.

Για να βρούμε το χρεολύσιο κάθε περιόδου, εκτός της πρώτης, αφαιρούμε από το τοκοχρεολύσιο τον νέο ελαττωμένο τόκο, οπότε προκύπτει αυξημένο χρεολύσιο.

Δηλαδή σε κάθε χρονική περίοδο, εκτός από την πρώτη, ο τόκος μειώνεται και το χρεολύσιο αυξάνεται. Γι' αυτό και η μέθοδος αυτή λέγεται μέθοδος του **προοδευτικού χρεολυσίου**.

Συγκεκριμένα τα χρεολύσια αποτελούν αύξουσα γεωμετρική πρόοδο

$$P_1 = K_o\, P_{n\urcorner i}\,,\ P_2 = P_1(1 + i),\ P_3 = P_1(1 + i)^2, ..., P_\mu = P_1 (1+ i)^{\mu-1}$$

της οποίας ο πρώτος όρος είναι το αρχικό χρεολύσιο $P_1 = K_o\, P_{n\urcorner i}$ και ο λόγος λ είναι το (1+ i).

Το εξοφλημένο ποσό Εμ στο τέλος της μ - περιόδου θα είναι ίσο με το άθροισμα των χρεολυσίων των προηγουμένων περιόδων, που είναι το άθροισμα των μ-όρων αυτής της γεωμετρικής προόδου:

$$E_\mu = P_1 + P_2 + ... + P_\mu = P_1 + P_1 (1 + i) + P_1 (1 + i)^2 + ...+ P_1(1 + i)^{\mu-1} =$$

$$= P_1 [1 + (1+ i) + (1 + i)^2 + ...+ (1 + i)^{\mu-1}] = K_o P_{n\urcorner i} S_{\mu\urcorner i}.$$ Δηλαδή

$$\mathbf{E_\mu = K_o P_{n\urcorner i} S_{\mu\urcorner i}} \qquad \mathbf{(3)}$$

Το ανεξόφλητο υπόλοιπο στο τέλος της μ-οστής περιόδου είναι :

$$\mathbf{Y_\mu = K_o - K_o P_{n\urcorner i} S_{\mu\urcorner i}} \qquad \mathbf{(4)}$$

και ο τόκος της μ-οστής περιόδου είναι:

$$\mathbf{I_\mu = Y_\mu \cdot i}$$

Ή

$$\mathbf{I_\mu = (K_o - K_o P_{n\urcorner i} S_{\mu\urcorner i}) \cdot i} \qquad \mathbf{(5)}$$

Παράδειγμα : Να λυθεί το πρόβλημα του προηγούμενου παραδείγματος με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου :

Λύση : K=100.000€ , $i = 0,12$, $n = 5$. Το ετήσιο τοκοχρεολύσιο είναι :

$R = K_o i + K_o P_{n\ i} = 12.000 + 15.740,970 = 27.740,970$€.

Πίνακας απόσβεσης δανείου με τη μέθοδο προοδευτικού χρεολυσίου

Έτος	Τόκος	Χρεολύσιο	Τοκοχρεολύσιο	Εξοφλημένο ποσό	Ανεξόφλητο ποσό
1ο	12.000	15.740,970	27.740,970	15.740,970	84.259,030
2ο	10.111,083	17.629,887	27.740,970	33.370,857	66.629,143
3ο	7.995,4971	19.745,473	27.740,970	53.116,330	46.883,670
4ο	5.626,0404	22.114,930	27.740,970	75.231,260	24.768,740
5ο	2.972,2488	24.768,722	27.740,970	99.999,982	0

Διευκρινίσεις:

- Ο τόκος κάθε έτους θα βρεθεί αν πολλαπλασιάσουμε το ανεξόφλητο ποσό επί το επιτόκιο.

- Το εξοφλημένο ποσό είναι κάθε φορά το άθροισμα των χρεολυσίων.

- Το ανεξόφλητο ποσό είναι το υπόλοιπο του αρχικού κεφαλαίου του δανείου μείον το εξοφλημένο.

Παρατήρηση: Το χρεολύσιο κάθε έτους μπορεί να βρεθεί και από τον τύπο:

$\mathbf{P_\mu = P_1 (1+ i)^{\mu-1}}$, και επειδή $\mathbf{P_1 = K_o P_{n\urcorner i}}$, μπορούμε να έχουμε και απ' ευθείας:

$$\mathbf{P_\mu = K_o P_{n\urcorner i} (1+ i)^{\mu-1}}$$

3. Σύστημα απόσβεσης με τη μέθοδο των δύο επιτοκίων ή μέθοδος του Sinking Fund

Σύμφωνα με το σύστημα αυτό χρησιμοποιούμε πάλι τον τύπο (2) ή (2΄), που δίνει την ετήσια τοκοχρεολυτική δόση, αλλά με δυο διαφορετικά επιτόκια. Δηλαδή αν χρησιμοποιήσουμε του τύπο (2΄), ο τόκος θα υπολογισθεί με το επιτόκιο **i** και το χρεολύσιο με ένα άλλο επιτόκιο **t,** συνήθως μικρότερο του i, αφού το χρεολύσιο σ' αυτή τη μέθοδο δεν καταβάλλεται στο δανειστή για να εξοφλήσει τμηματικά το χρέος αλλά κατατίθεται για να δημιουργηθεί **εξοφλητικό απόθεμα (Sinking Fund)**.

Πιο συγκεκριμένα, ο οφειλέτης θα πληρώνει στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου τόκους για ολόκληρο το ποσό και συγχρόνως θα καταθέτει ένα σταθερό ποσό σε μια τράπεζα με επιτόκιο $\mathbf{t < i}$, ώστε μετά από **n** χρονικές περιόδους να σχηματισθεί το ποσό του δανείου. Το **t** λέγεται **επιτόκιο ανασύστασης**.

Το τοκοχρεολύσιο που πρέπει να πληρώνει θα είναι:

$$\mathbf{R = K_o\, i + K_o P_{n\urcorner t}} \qquad \mathbf{(6)}$$

Παράδειγμα : Ένας επιχειρηματίας πήρε δάνειο 80.000€ για 4 έτη με ετήσιο επιτόκιο 6%. Να βρείτε το ετήσιο τοκοχρεολύσιο και να συντάξετε τον πίνακα απόσβεσης με τη μέθοδο των δύο επιτοκίων (Sinking Fund) αν το επιτόκιο ανασύστασης είναι t = 4%.

Λύση : $K_o = 80.000$, $n = 4$, $i = 0,06$, $t = 0,04$

$R = K_o\, i + K_o P_{n\urcorner t} = 80.000 \times 0,06 + 80.000 \times 0,23549 = 4.800 + 18.839,2 =$

$= 23.639,2$€.

Πίνακας απόσβεσης

Έτος	Τόκος	Χρεολύσιο	Τοκοχρεολύσιο	Παραγόμενος τόκος	Εξοφλητικό απόθεμα
1	4.800	18.839,2	23.639,2	-	18.839,2
2	4.800	18.839,2	23.639,2	753,568	38.431,968
3	4.800	18.839,2	23.639,2	1.537,2787	58.808,447
4	4.800	18.839,2	23.639,2	2.352,338	79.999,985

Διευκρινίσεις: - Οι τόκοι θα είναι επί του αρχικού ποσού σταθεροί. Το ίδιο και το χρεολύσιο, το οποίο κατατίθεται στην τράπεζα στο τέλος του πρώτου έτους, γίνεται δηλαδή εξοφλητικό απόθεμα. Στο τέλος του δεύτερου έτους το εξοφλητικό απόθεμα θα είναι το προηγούμενο εξοφλητικό απόθεμα συν τον τόκο που παράγει το εξοφλητικό απόθεμα συν ακόμα ένα χρεολύσιο: 18.839,2 + 753,568 +18.839,2 = 38.431,968€. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο.

Δάνεια κτηματικής πίστεως

Είναι μακροπρόθεσμα δάνεια διάρκειας 15 - 25 ετών και χορηγούνται με υποθήκη ακίνητης περιουσίας, κυρίως για την απόκτηση στέγης. Η εξόφληση τους γίνεται τοκοχρεολυτικώς με δόσεις συνήθως εξαμηνιαίες ή και μηνιαίες.

Το τοκοχρεολύσιο παραμένει σταθερό, άρα και το επιτόκιο σε όλη τη διάρκεια του δανείου και είναι:

για εξαμηνιαία δόση:

$$\mathbf{R = K_o \cdot i/2 + K_o\, P_{\,2n\urcorner\, i/2}} \qquad \mathbf{(7)}$$

για μηνιαία δόση:

$$\mathbf{R = K_o \cdot i/12 + K_o\, P_{\,12n\urcorner\, i/12}} \qquad \mathbf{(8)}$$

Το ανεξόφλητο ποσό για εξαμηνιαία δόση μετά από μ εξάμηνα θα είναι :

$$\mathbf{N_\mu = K_o - K_o\, P_{\,2n\urcorner\, i/2}\, S_{\mu\urcorner\, i/2}} \qquad \mathbf{(9)}$$

όπου $\mathbf{S_{\mu\urcorner\, i/2}}$ είναι η τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας με περίοδο 1 εξάμηνο.

Παράδειγμα: Ένας υπάλληλος πήρε δάνειο από το Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο 330.000€ με ετήσιο επιτόκιο 12% και διάρκεια 10 έτη και εξαμηνιαίες δόσεις.

Να συντάξετε τον πίνακα απόσβεσης για τα 4 πρώτα εξάμηνα με τη μέθοδο του σταθερού χρεολυσίου και να βρείτε το υπόλοιπο του δανείου μετά από 6 έτη.

Λύση :

$R = K_o\, i/2 + K_o\, P_{2n \urcorner\, i/2} = K_o\, i/2 + K_o\, P_{20 \urcorner\, 0,06} = 330.000 \times 0,06 + 330.000 \times 0,0271846 = 198.000 + 89.709,18 = 287.709,18€.$

Πίνακας απόσβεσης

Εξάμηνο	Τόκος	Χρεολύσιο	Τοκοχρεο-λύσιο	Εξοφλημένο ποσό	Υπόλοιπο
1ο	19.800	8.970,918	28.770,918	8.970,918	321.029,082
2ο	19.800	8.970,918	28.770,918	18.480,091	311.519,909
3ο	19.800	8.970,918	28.770,918	28.559,81	301.440,19
4ο	19.800	8.970,918	28.770,918	39.244,32	290.755,68

Ανεξόφλητο υπόλοιπο μετά από 6 έτη ή 12 εξάμηνα:

$$\mathbf{Y_{12} = K_o - K_o\, P_{2n\urcorner\, i/2}\, S_{\mu \urcorner\, i/2}} = K_o - K_o\, P_{20 \urcorner\, 0,06}\, S_{12 \urcorner\, 0,06} =$$

$$= 330.000 – 330.000 \times 0,0271846 \times 16,86994 = 151.338,8484€.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΕΝΙΑΙΑ ΔΑΝΕΙΑ

1. Κάποιος δανείσθηκε 1.000.000 € για να τα εξοφλήσει μέσα σε 3 χρόνια με επιτόκιο 8% με τη μέθοδο απόσβεσης του προοδευτικού χρεολυσίου. Να συντάξετε τον πίνακα απόσβεσης του δανείου.

Λύση: $R = K_o\, i + K_o\, P_{n \urcorner\, i} = 1.000.000 \times 0,08 + 1.000.000 \times 0,3080335 =$
$=80.000+ 308.033,5 = 388.033,5€.$

Πίνακας απόσβεσης

Έτος	Τόκος	Χρεολύσιο	Τοκοχρεολύσιο	Εξοφλημένο	Υπόλοιπο
1	80.000	308.033,5	388.033,5	308.033,5	691.966,5
2	55.357,32	332.676,18	388.033,5	640.709,68	359.290,4
3	28.743,23	359.290,27	388.033,5	999.999,9544	0

Παρατήρηση : Το χρεολύσιο κάθε έτους μπορεί να βρεθεί και από τον τύπο :

$P_\mu = P_1 (1+ i)^{\mu-1}$.

Π.χ. Το $P_3 = P_1(1 + i)^2 = 308.033{,}5 \times 1{,}1664 = 359.290{,}27$€.

2. Μια εταιρεία πήρε δάνειο 5.000.000€ από την Εμπορική Τράπεζα με ετήσιο επιτόκιο 12% για 12 χρόνια. Αν η απόσβεση γίνεται με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου και είναι εξαμηνιαία να γίνει ο πίνακας απόσβεσης του δανείου για τα 2 πρώτα χρόνια και να βρεθεί το υπόλοιπο του δανείου μετά από 4 έτη και 6 μήνες.

Λύση: n=12 x2= 24 εξάμηνα = 24, i/2 = 0,12/2 = 0,06.

Θα βρούμε πρώτα το εξαμηνιαίο τοκοχρεολύσιο: $R = K_o\, i/2 + K_o\, P_{2n\urcorner\, i/2} =$

$= 5.000.000 \times 0{,}06 + 5.000.000 \times P_{24\urcorner\, 0{,}06} = 300.000 + 5.000.000 \times 0{,}019679 =$ $300.000 + 98.395 = 398.395$.

Πίνακας απόσβεσης

Εξάμηνο	Τόκος	Χρεολύσιο	Τοκοχρεολύσιο	Εξοφλημένο	Υπόλοιπο
1	300.000	98.395	398.395	98.395	4.901.605
2	294.096,3	104.298,7	398.395	202.693,7	4.797.306,3
3	287.838,4	110.556,62	398.395	313.250,3	4.686.749,7
4	281.204,98	117.190,02	398.395	430.440,32	4.569.559,7

Τα 4 έτη + 6 μήνες = 9 εξάμηνα. Από τον τύπο (9) θα βρούμε το υπόλοιπο:

$Y_\mu = K_o - K_o\, P_{2n\urcorner\, i/2}\, S_{\mu\urcorner\, i/2} = K_o - K_o\, P_{24\urcorner\, 0{,}06}\, S_{9\urcorner\, 0{,}06} = 5.000.000 -$

$5.000.000 \times 0{,}019679 \times 11{,}491316 = 3.869.312$€.

3. Μια βιομηχανία πήρε δάνειο 40.000.000€ για 10 έτη με ετήσιο επιτόκιο 12 %. Να συντάξετε τον πίνακα απόσβεσης με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου για τα 3 πρώτα έτη και να βρείτε το χρεολύσιο του 5ου έτους.

Λύση: Το ετήσιο τοκοχρεολύσιο είναι: $R = K_o\, i + K_o\, P_{10\urcorner 0,12}$ = 40.000.000 x 0,12 + 40.000.000 x 0,0569842 = 4.800.000 + 2.279.368 = 7.079.369€.

Πίνακας απόσβεσης

Έτος	Τόκος	Χρεολύσιο	Τοκοχρεολύσιο	Εξοφλημένο ποσό	Υπόλοιπο
1^o	4.800.000	2.279.368	7.079.368	2.279.368	37.720.632
2^o	4.526.475,8	2.552.892.2	7.079.368	4.832.260,2	35.167.740
3^o	4.220.128,8	2.859.239,2	7.079.368	7.691.499,4	32.308.501

Από τον τύπο $P_\mu = P_1\,(1+ i)^{\mu-1}$, που μας δίνει το χρεολύσιο της μ-περιόδου, θα έχουμε:

$P_5 = P_1(1+0,12)^{5-1}$ =2.279.368 x $(1 + 0,12)^4$ =2.279.368 x 1,5735193 = 3.586.629,54€.

4. Ένας έμπορος πήρε δάνειο 2.000.000€ για 3 έτη με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 12% και πρέπει να το εξοφλήσει σε εξαμηνιαίες δόσεις. Να βρείτε την εξαμηνιαία δόση και να κατασκευάσετε τον πίνακα απόσβεσης με τη μέθοδο Sinking Fund αν το ετήσιο επιτόκιο ανασύστασης είναι 8 %.

Λύση : i = 0,12, n = 3 έτη 2n = 6 εξάμηνα , t = 0,08 , t/2 =0,04.

$R = K_o\, i/2 + K_o\, P_{2n\urcorner\, t/2} = K_o\, i/2 + K_o\, P_{6\urcorner 0,04}$ = 2.000.000 x 0,06 + 2.000.000 x 0,1507612 = 120.000 + 301.522,4 = 421.522,4 €.

Πίνακας απόσβεσης

Εξάμηνο	Τόκος	Χρεολύσιο	Τοκοχρεολύσιο	Παραγόμενος τόκος	Εξοφλητικό απόθεμα
1ο	120.000	301.522,4	421.522,4	-	301.522,4
2ο	120.000	301.522,4	421.522,4	12.060,9	615.105,7
3ο	120.000	301.522,4	421.522,4	24.604,23	941.232,3
4ο	120.000	301.522,4	421.522,4	37.649,3	1.280.404
5ο	120.000	301.522,4	421.522,4	51.216,16	1.633.142,5
6ο	120.000	301.522,4	421.522,4	65.325,7	1.999.990,6

5. Ένας ιδιώτης πήρε από την Κτηματική Τράπεζα δάνειο 500.000€ με ετήσιο επιτόκιο 8%, για 10 χρόνια. Η εξόφληση θα γίνει τοκοχρεολυτικώς με ίσες εξαμηνιαίες δόσεις. Να κατασκευασθεί ο πίνακας απόσβεσης για τα 3 πρώτα εξάμηνα (δια του προοδευτικού χρεολυσίου).

Λύση: i/2 = 4%. Διάρκεια δανείου: 2n = 20 εξάμηνα.

Θα βρούμε πρώτα το εξαμηνιαίο τοκοχρεολύσιο: R = Ko i/2 + Ko P 2n ┐ i/2 =Ko i/2 + Ko P 20 ┐ 0,04 = 500.000 x 0,04 + 500.000 x 0,03358 = 20.000+ 16.790 = 36.790€.

Πίνακας απόσβεσης

Εξάμηνο	Τόκος	Χρεολύσιο	Τοκοχρεολύσιο	Εξοφλημένο ποσό	Υπόλοιπο
1ο	20.000	16.790	36790	16790	483.210
2ο	19328,4	17461,6	36790	34251,6	465748,4
3ο	18629,936	18160,064	36790	52411,664	447588,336